ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

с решениями и указаниями

5–7 классы

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

Лаборатория ЗНАНИЙ

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА

АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

с решениями и указаниями

5–7
классы

Москва
Лаборатория знаний

УДК 373.167.1:511
ББК 22.130я721.6
З-80

Золотарёва Н. Д.

З-80 Олимпиадная математика. Арифметические задачи с решениями и указаниями. 5–7 классы / Н. Д. Золотарёва, М. В. Федотов. — М. : Лаборатория знаний, 2019. — 252 с. : ил. — (ВМК МГУ — школе).

ISBN 978-5-00101-209-2

Настоящее пособие составлено преподавателями факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова на основе олимпиадных задач по математике. Пособие содержит теоретический материал, подборку задач, а также идеи, указания (подсказки) и решения.

Рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

УДК 373.167.1:511
ББК 22.130я721.6

Учебное издание

Серия: «ВМК МГУ — школе»

Золотарёва Наталья Дмитриевна
Федотов Михаил Валентинович

ОЛИМПИАДНАЯ МАТЕМАТИКА.
АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ И УКАЗАНИЯМИ.
5–7 КЛАССЫ

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*
Художник *В. А. Прокудин*
Технический редактор *Т. Ю. Федорова*. Корректор *И. Н. Панкова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете LaTeX 2_ε

Подписано в печать 07.03.19. Формат 70×100/16.
Усл. печ. л. 20,80. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»
125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3
Телефон: (499) 157-5272
e-mail: info@pilotLZ.ru, http://www.pilotLZ.ru

ISBN 978-5-00101-209-2

© Лаборатория знаний, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

ОТ АВТОРОВ

Уважаемые читатели, вы держите в руках одну из книг серии «ВМК МГУ — школе». Учебно-методические пособия, входящие в эту серию, являются результатом более чем пятнадцатилетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова.

Сейчас изданы пособия по алгебре, геометрии, информатике и физике для старшеклассников для подготовки к ЕГЭ, олимпиадам и вступительным экзаменам в вузы. Недавно вышли пособия по математике для подготовки к ГИА для девятиклассников.

Но мы не хотим останавливаться только на стандартных задачах, необходимых для сдачи ГИА и ЕГЭ и экзаменов в вузы. Мы хотим, чтобы школьники с младших классов и до окончания школы могли решать задачи повышенной сложности — олимпиадные задачи, на которые у учителя обычно не остаётся времени на обычном уроке математики. Большинство книг по этой тематике выходят без разбивки по классам либо без разбивки по темам. Многие хорошие книги с олимпиадными задачами вышли давно и с тех пор не переиздавались. Мы собрали много задач из различных старых и не очень старых сборников олимпиадных задач и предлагаем их вам.

Настоящее пособие рассчитано на 5–7 классы и является первым в серии пособий по олимпиадным задачам. Будет ещё несколько книг для 5–7 классов. Параллельно мы уже ведём работу над сборником задач для 8–9 классов. Завершит серию, конечно же, пособие для 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте. Дорогу осилит идущий.

Заместитель декана по учебной работе
факультета вычислительной математики и кибернетики
МГУ имени М.В. Ломоносова,
доцент кафедры математической физики

М. В. Федотов

ПРЕДИСЛОВИЕ

Каждый раздел пособия содержит теоретические основы, описание методов решения задач, примеры применения методов и набор заданий для решения. Задачи в разделах в основном расположены по принципу «*от простого — к сложному*». Аналогичная ситуация имеет место и с последовательностью разделов, поэтому сами разделы и задачи в разделах рекомендуется изучать в предложенном порядке. Приступать к решению задач надо после изучения соответствующего теоретического материала и разбора примеров.

После номера задачи приведены номера классов, для которых эта задача была предложена на олимпиаде. Однако это разделение на классы довольно условно. Понятно, что если задачу давали в 5 классе, то её можно давать и в 6–7 классах, и часто, наоборот, задача, которую давали на олимпиаде для 6–7 классов, вполне по силам пятиклассникам. Поэтому, придерживаясь рекомендаций о принадлежности задачи тому или иному классу, относитесь к этим рекомендациям творчески. Кстати, распределение задач по разделам тоже не всегда однозначно. Одну и ту же задачу можно было отнести к разным разделам.

В принципе по этому пособию можно заниматься три года: в 5 классе пройти по всем разделам, выбирая задачи для 5 класса, в 6 классе снова пройти по всем разделам, выбирая задачи для 6 класса и т. д. А можно пройти и за более короткий срок: за два года, если вы начали заниматься в 6 классе, или за один год, если вы уже в 7 классе.

Пособие рекомендуется школьникам 5–7 классов, интересующимся олимпиадными задачами, учителям математики, руководителям кружков и факультативов.

Желаем удачи!

ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

$\{a\}$ — множество, состоящее из одного элемента a;
$\cup$ — объединение;
$\cap$ — пересечение;
$\varnothing$ — пустое множество;
$\in$ — знак принадлежности;
$\subset$ — знак включения подмножества;
$\forall$ — для любого;
$A \backslash B$ — разность множеств A и B;
$\Longrightarrow$ — следовательно;
$\Longleftrightarrow$ — тогда и только тогда;
$\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$;
$\mathbb{Z}$ — множество всех целых чисел;
$\mathbb{Q}$ — множество всех рациональных чисел;
$\mathbb{R}$ — множество всех действительных чисел;
ОДЗ — область допустимых значений;
$\left\{\begin{array}{l}\ldots\\ \ldots\end{array}\right.$ — знак системы, означающий, что должны выполняться все условия, объединённые этим знаком;
$\left[\begin{array}{l}\ldots\\ \ldots\end{array}\right.$ — знак совокупности, означающий, что должно выполняться хотя бы одно из условий, объединённых этим знаком.

Необходимо отметить, что в формулировках задач параллельно с математически более корректной терминологией типа «длина отрезка AB равна 5» и записью $|AB| = 5$ используется школьная терминология типа «отрезок AB равен 5» и запись $AB = 5$.

Часть I. ТЕОРИЯ И ЗАДАЧИ

Арифметические задачи обычно встречаются на олимпиадах первых уровней (школьной, районной). На олимпиадах более высокого уровня их обычно не дают, но мы рекомендуем вам тем не менее прорешать задачи этого раздела, поскольку на них хорошо отрабатывать внимательность и умение аккуратно выполнять непростые последовательности действий. Эти задачи также хороши для первичного развития логического мышления.

1. Задачи на вычисление

Теоретический материал

В этом разделе собраны задачи, связанные с вычислением. В начале раздела идут задачи, в которых надо просто уметь раскрывать скобки, группировать слагаемые, выносить за скобки равные величины, приводить подобные, взаимно сокращать равные величины с разными знаками, использовать формулы сокращённого умножения:

$$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b); \qquad (1)$$

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2; \qquad (2)$$

$$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2; \qquad (3)$$

$$a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2); \qquad (4)$$

$$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2); \qquad (5)$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3; \qquad (6)$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3; \qquad (7)$$

причём все формулы нужно узнавать не только «слева направо», но и «справа налево».

Применение формул сокращённого умножения является одним из самых простых способов разложения алгебраического выражения на множители. Все формулы справедливы при любых вещественных a и b, которые сами могут являться числами, функциями или другими выражениями.

Помимо основных формул сокращённого умножения полезно знать и формулы для большего числа слагаемых, например:

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ac.$$

В общем случае квадрат суммы нескольких чисел есть сумма квадратов этих чисел плюс сумма всевозможных удвоенных попарных произведений с точностью до перестановки множителей.

Полезно знать также две следующие формулы, верные $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1});$$

$$a^{2n+1}+b^{2n+1} = (a+b)(a^{2n}-a^{2n-1}b+a^{2n-2}b^2-\ldots-ab^{2n-1}+b^{2n}).$$

Во второй части этого раздела приведены текстовые задачи на вычисления. Во всех этих задачах ответ получается простыми вычислениями, нигде не нужно составлять уравнения, даже если вы умеете решать уравнения. Даже, наоборот, без составления уравнений решение получается проще и элегантнее.

В заключительной части данного раздела приведены задачи с дробями. Умение работать с дробями — очень важное умение. Не бойтесь этих задач и ни в коем случае их не пропускайте. Не переходите к следующему разделу, пока не разберётесь с дробями.

Примеры решения задач

Пример 1. Вычислить

$$\frac{5^4x^4-0{,}99x-0{,}0199}{1000x^3-1}$$

при а) $x=-0{,}02$, б) $x=0{,}1$.

Решение. а) Заметим, что если $x=-0{,}02$, то $5x=-0{,}1$ и $5^4x^4=(5x)^4=0{,}0001$. Поэтому

$$5^4x^4-0{,}99x-0{,}0199 = 0{,}0001+0{,}0198-0{,}0199 = 0.$$

Так как знаменатель дроби $1000x^3-1=(10x)^3-1=(-0{,}2)^3-1$ в нуль не обращается, то дробь равна нулю.

б) Так как знаменатель дроби $1000x^3-1=(10x)^3-1=1^3-1$ обращается в нуль, то при $x=0{,}1$ выражение теряет смысл, поскольку деление на нуль невозможно.

Ответ. а) 0; б) при $x=0{,}1$ выражение теряет смысл, так как деление на нуль невозможно.

Пример 2. Что больше и на сколько: утроенная разность квадратов чисел a и x или удвоенная разность квадратов тех же чисел, если a равно наибольшему двузначному отрицательному числу, а x равно наименьшему двузначному отрицательному числу?

Решение. Наибольшее двузначное отрицательное число $a=-10$. Наименьшее двузначное отрицательное число $x=-99$.

Разность квадратов чисел a и x — это $A = a^2 - x^2$. Поэтому, чтобы сравнить утроенную разность квадратов чисел a и x и удвоенную разность квадратов тех же чисел, достаточно сравнить $3A$ и $2A$, т. е. надо просто сравнить A с нулём.

$$A = a^2 - x^2 = (-10)^2 - (-99)^2 = 10^2 - 99^2 = 100 - (100-1)^2 =$$
$$= 100 - (100^2 - 2 \cdot 100 + 1^2) = -10\,000 + 300 - 1 = -9701 < 0.$$

Следовательно, удвоенная разность квадратов чисел a и x больше утроенной разности квадратов этих же чисел на 9701.
Ответ. При $a = -10$ и $x = -99$ удвоенная разность квадратов чисел a и x больше утроенной разности квадратов этих же чисел на 9701.

Пример 3. Какое число больше:

$$\underbrace{666\ldots66}_{25\text{ цифр}} \cdot \underbrace{222\ldots22}_{57\text{ цифр}} \quad \text{или} \quad \underbrace{333\ldots33}_{25\text{ цифр}} \cdot \underbrace{444\ldots45}_{57\text{ цифр}}$$

и на сколько?

Решение. Положим $A = \underbrace{333\ldots33}_{25\text{ цифр}}$, $B = \underbrace{222\ldots22}_{57\text{ цифр}}$.
Тогда первое число равно $2AB$, а второе число равно $A(2B+1) = 2AB + A$. Поэтому второе число больше первого на A.
Ответ. Второе число больше на $\underbrace{333\ldots33}_{25\text{ цифр}}$.

Пример 4. Два карандаша и ластик стоят столько же, сколько один карандаш и четыре ластика. Во сколько раз карандаш дороже ластика?

Решение. Сравним два набора:

1) два карандаша и ластик;
2) один карандаш и четыре ластика.

В обоих наборах есть по одному карандашу и одному ластику, но в первом наборе есть один дополнительный карандаш, а во втором — три дополнительных ластика. Значит, один карандаш стоит столько же, сколько стоят три ластика.
Ответ. В 3 раза.

Замечание. Такой метод решения иногда называют «Метод Прокруста»[1].

---

[1] Прокруст — персонаж мифов Древней Греции, разбойник, подстерегавший путников на дороге между Мегарой и Афинами. Он обманом заманивал в свой дом путников. Потом он укладывал их на своё ложе и тем, кому оно было коротко, обрубал ноги, а кому было велико, ноги вытягивал — по длине этого ложа. Пришлось на это ложе лечь и самому Прокрусту: герой древнегреческих мифов Тесей, победив Прокруста, поступил с ним так же, как тот поступал со своими пленниками.

Пример 5. Мальчик собрал в коробку жуков и пауков — всего 9 штук. Если всего в коробке 60 ног, сколько там пауков? (У жука 6 ног, у паука 8 ног.)

Решение. Шестью девять — пятьдесят четыре, т. е. если бы у каждого насекомого в коробке было по 6 ног, то всего у 9 насекомых было бы 54 ноги. Значит оставшиеся 6 ($60 - 54 = 6$) ног принадлежат паукам. Так как у паука на 2 ноги больше, чем у жука ($8 - 6 = 2$), то пауков в коробке 3 ($6 : 2 = 3$).
Ответ. 3 паука.

> ***Замечание.*** Ещё раз напоминаем, что все задачи этого разделов (да и многих следующих разделов этой главы) решаются без составления уравнений.

Пример 6. От бревна длиной 5 м каждую минуту отпиливают по полметра. За сколько минут будет распилено всё бревно?

Решение. После того как распилят всё бревно, получится 10 полуметровых чурбаков, но будет ошибкой считать, что и распилов потребуется 10. Нет, распилов надо сделать всего 9, так как при последнем, девятом распиле образуется не один, а два чурбака, тогда как при всех предыдущих распилах получался только один чурбак. Значит, бревно будет распилено за 9 минут.
Ответ. За 9 минут.

> ***Замечание.*** Это опять же классическая задача. Иногда такие задачи называют «задачами о столбах и пролётах между ними». Столбов всегда на один больше, чем пролётов между ними.

Пример 7. В сражении участвовали армии Синих и Зелёных по 500 человек в каждой. Сначала каждый Синий солдат выстрелил в одного из Зелёных; затем каждый уцелевший Зелёный солдат выстрелил в одного из Синих. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.

Доказательство. Пусть после залпа Синих уцелело n Зелёных солдат. Тогда после их залпа будет убито не более n Синих солдат. Значит, у Синих осталось не менее $500 - n$ солдат, а общее число оставшихся солдат не меньше чем

$$n + 500 - n = 500.$$

Пример 8. Быстро вычислить

$$10\,101 \cdot \left(\frac{5}{111\,111} + \frac{5}{222\,222} - \frac{4}{3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 37}\right).$$

Решение. Разложим сначала на простые множители $10\,101$, $111\,111$ и $222\,222$:

$$10\,101 = 111 \cdot 91 = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 13;$$

$$111\,111 = 111 \cdot 1001 = 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11;$$

$$222\,222 = 2 \cdot 111\,111 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 11.$$

Значит, исходное выражение равно

$$3\cdot 37\cdot 7\cdot 13\cdot\left(\frac{5}{3\cdot 37\cdot 11\cdot 7\cdot 13}+\frac{5}{2\cdot 3\cdot 37\cdot 11\cdot 7\cdot 13}-\frac{4}{3\cdot 7\cdot 11\cdot 13\cdot 37}\right)=$$
$$=\frac{5}{11}+\frac{5}{2\cdot 11}-\frac{4}{11}=\frac{10+5-8}{22}=\frac{7}{22}\,.$$

Ответ. $\frac{7}{22}$.

Пример 9. Быстро вычислить: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}$.

Решение. Заметим, что

$$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}=\frac{2-1}{1\cdot 2}=\frac{1}{1\cdot 2};\qquad \frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{3-2}{2\cdot 3}=\frac{1}{2\cdot 3};\quad \ldots$$
$$\ldots,\quad \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{n+1-n}{n\cdot(n+1)}=\frac{1}{n\cdot(n+1)}\,.$$

Поэтому получаем

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{1}{1}-\frac{1}{5}=\frac{4}{5}\,.$$

Ответ. $\frac{4}{5}$.

Замечание. Напоминаем ещё раз: не переходите к следующим разделам, пока не разберётесь с дробями.

Задачи

Просто вычисления

1. $\boxed{5}$ Выполните действия:
   а) $(257\,368+2573)+(42\,632-1573)$;
   б) $354\cdot 73+23\cdot 25+354\cdot 27+17\cdot 25$;
   в) $26\cdot 25-25\cdot 24+24\cdot 23-23\cdot 22+22\cdot 21-21\cdot 20+20\cdot 19-19\cdot 18+18\cdot 17-17\cdot 16+16\cdot 15-15\cdot 14$.
2. $\boxed{7}$ а) Докажите, что выражение $(a+b)x+(a-b)x-2ax$ тождественно равно нулю.
   б) Докажите, что при любых значениях a, x и y верно равенство
   $$(x-y)(x+y)-(a-x+y)(a-x-y)-a(2x-a)=0.$$
3. $\boxed{7}$ Среди перечисленных выражений указать такие, которые:
   а) тождественно равны a^2: $(-a)^2$; $-(-a)^2$; $-a^2$;
   б) тождественно равны a^3: $(-a)^3$; $-(-a)^3$; $-a^3$.
4. $\boxed{6\text{-}7}$ Найдите быстро результат:
   а) $\dfrac{m^2(m+n^2)(m^3-n^6)(m^2-n)}{m^2+n^2}$, где $m=4$, $n=16$;
   б) $a^2(a+b^2)(a^4-b^{10})(a^2-b)$, где $a=5$, $b=25$.

5. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Показать, что пятая степень удвоенной разности чисел x и y на 6 меньше 5, если $x = 0{,}5$; $y = 1$.

   б) Что больше и на сколько: 2 или девятая часть утроенной суммы чисел a и b, если $a = -2$ и $b = 1$?

6. $\boxed{7}$ а) Найти значение выражения
$$81a^7b^5c^3 + 36a^5b^6c^4 - 135a^6b^4c^5$$
   при $a = -2,\ b = -\frac{1}{2},\ c = -\frac{1}{3}$.

   $\boxed{6\text{-}7}$ б) Вычислить $0,001a^3b^2 - 500a^2b^3$, если a равно наибольшему двузначному отрицательному числу, b равно наименьшему целому числу, заключённому между $-2{,}5$ и $-5{,}3$.

7. $\boxed{6\text{-}7}$ 1) Вычислить $\dfrac{9a^2 - 3a + 1}{27a^3 + 1}$: а) если a равно наибольшему целому отрицательному числу, б) при $a = -\frac{1}{3}$.

   2) Вычислить $\dfrac{5^3a^5 - 1000a^3 - 8,9896}{a^4 - 3a^2 - 4}$ при а) $a = -0{,}2$, б) $a = -2$.

   3) Вычислить $\dfrac{8x^3 + 62}{4x^2 - 4x + 1}$: а) если x равно наибольшему отрицательному двузначному числу, б) при $x = 0{,}5$.

8. $\boxed{6\text{-}7}$ Написать: 1) полусумму четвёртых степеней чисел a и b и 2) квадрат полусуммы квадратов тех же чисел.
   Установить, числовое значение какого из двух выражений больше, при

   а) $a = -1,\ b = 0{,}5$; б) $a = 0{,}2,\ b = -3$; в) $a = 3,\ b = 0$.

Разложение на множители

9. $\boxed{5}$ Найдите ошибку в следующих рассуждениях. Имеем верное числовое равенство: $4 : 4 = 5 : 5$. Вынесем за скобки в каждой части общий множитель. Получим: $4(1 : 1) = 5(1 : 1)$. Числа в скобках равны, поэтому $4 = 5$, или $2 \cdot 2 = 5$.

10. $\boxed{5}$ Запишите число, состоящее из суммы 11 тысяч, 11 сотен и 11 единиц.

11. $\boxed{7}$ а) При сложении четырёх чисел из-за их нечёткой записи в первом числе в разряде сотен цифра 2 была принята за 5, во втором числе в разряде тысяч цифра 3 была принята за 8, в третьем числе в разряде единиц цифра 9 была принята за 2 и в четвёртом числе в разряде десятков цифра 7 была принята за 4. В результате сложения получили 28 975. Найдите ошибку результата и верную сумму.

    б) При сложении нескольких чисел ученик из-за небрежности допустил ошибки: цифру единиц 9 он принял за 3, цифру сотен 7 он принял за 1, а цифру тысяч 6 он принял за 5. У ученика получилось в сумме 72 438. Найдите верную сумму.

12. $\boxed{5}$ Вычислите $101\,101 \cdot 999 - 101 \cdot 999\,999$.

13. $\boxed{7}$ а) Какое число больше:

$$\underbrace{888\ldots88}_{19\text{ цифр}} \cdot \underbrace{333\ldots33}_{68\text{ цифр}} \quad\text{или}\quad \underbrace{444\ldots44}_{19\text{ цифр}} \cdot \underbrace{666\ldots67}_{68\text{ цифр}}$$

и на сколько?

б) Какое из чисел больше:

$$\underbrace{1000\ldots001}_{1965\text{ нулей}} : \underbrace{1000\ldots001}_{1966\text{ нулей}} \quad\text{или}\quad \underbrace{1000\ldots001}_{1966\text{ нулей}} : \underbrace{1000\ldots001}_{1967\text{ нулей}}\ ?$$

14. $\boxed{7}$ Вычислите $\left(4 \cdot 10^{2011} - 1\right) : (4 \cdot \underbrace{333\ldots33}_{2011\text{ цифр}} + 1)$.

15. $\boxed{7}$ Двоим друзьям потребовалось вычислить $4^2 - 3^2$. Они заметили, что результат — число 7 — равен сумме оснований квадратов чисел 4 и 3. Проверив своё открытие на числах 11 и 10, друзья установили, что оно подтверждается: $11^2 - 10^2 = 21 = 11 + 10$. После этого друзья нашли все пары $(a; b)$ натуральных чисел $a > b$, для которых разность $a^2 - b^2$ равна сумме $a + b$. Как друзьям удалось найти все такие числа $(a; b)$?

16. $\boxed{7}$ Разложите на множители $81a^{20}x^{16} - 16b^8y^{20}$.

17. $\boxed{6\text{-}7}$ Написать частное от деления разности четвёртых степеней чисел x и y на произведение суммы их первых степеней на сумму их квадратов. Вычислить, подставляя числа:
а) $x = -1$; $y = 2$; б) $x = 0$; $y = -0{,}5$; в) $x = -5$; $y = -6$.

18. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Вычислить $8\,\dfrac{16}{23}\,x^2y^3 - 0,02x^3y^2$, если x равен наибольшему целому числу, заключённому между числами $-9{,}3$ и $-15{,}1$, а y — наименьшему простому числу в третьем десятке натуральных чисел.

б) Найти число, обратное частному от деления разности квадратов чисел x и y на сумму кубов тех же чисел, если $x = -11$; $y = -1$.

в) Что больше и на сколько: полусумма кубов чисел a и x или куб полусуммы тех же чисел, если a — наименьшее чётное число, заключённое между $-19{,}5$ и $-13{,}5$, а x — наибольшее нечётное отрицательное двузначное число?

19. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Доказать, что числовое значение выражения

$$(x^2 - ax + b)^2 + 2(x^2 - ax + b)(ax - b) + (ax - b)^2$$

не зависит от a и b.

б) Доказать, что числовое значение многочлена

$$(x^3+ax-b)^3-3(x^3+ax-b)^2(ax-b)+3(x^3+ax-b)(ax-b)^2-$$
$$-(ax-b)^3-(x^6+5x^3+25)(x^3-5)$$

постоянно.

Текстовые задачи на вычисления

20. $\boxed{5}$ а) Масса бидона с молоком 32 кг, без молока — 2 кг. Какова масса бидона, заполненного молоком наполовину?

б) У поросят Ниф-Нифа и Нуф-Нуфа было соответственно 4 и 8 одинаковых пирогов. К ним пришёл Наф-Наф и попросил угостить его пирогами. Пироги были разделены поровну. После того как все пироги были съедены, Наф-Наф поблагодарил поросят и дал им 6 рублей. Как разделить эти деньги между Ниф-Нифом и Нуф-Нуфом справедливо?

21. $\boxed{5}$ а) Чашка и блюдце вместе стоят 25 рублей, а 4 чашки и 3 блюдца стоят 88 рублей. Найдите цену чашки и цену блюдца.

$\boxed{7}$ б)★ На свои деньги Петя мог бы купить 8 бубликов и 7 пирожных либо 5 бубликов и 8 пирожных. Сколько он смог бы купить одних бубликов?

22. $\boxed{5}$ а) У щенят и утят вместе 44 ноги и 17 голов. Сколько щенят и сколько утят?

б) На скотном дворе гуляли гуси и поросята. Мальчик сосчитал количество голов, их оказалось 30; затем он сосчитал количество ног, их оказалось 84. Сколько гусей и сколько поросят было на скотном дворе?

23. $\boxed{5}$ а) Было 9 листов бумаги. Некоторые из них разрезали на три части. Всего стало 15 листов. Сколько листов бумаги разрезали?

б) На озере расцвела 1 лилия. Каждый день число цветков удваивалось, и на 10-й день всё озеро покрылось цветами. На какой день покрылась цветами половина озера?

24. $\boxed{5}$ а) Средний возраст 11 игроков футбольной команды 22 года. Во время матча один из игроков за грубое нарушение правил был удалён с поля до конца игры. Средний возраст оставшихся на поле игроков стал равен 21. Сколько лет футболисту, удалённому с поля?

б) На координатном луче отмечено несколько точек, координаты которых являются натуральными числами. Известно также, что сумма этих чисел равна 75. Если мы каждую точку переместим на три единичных отрезка, то сумма координат новых точек будет равняться 99. Сколько точек было отмечено на координатном луче?

25. $\boxed{5}$ а) На прямой линии посажено 10 кустов так, что расстояние между любыми соседними кустами одно и то же. Найдите это расстояние, если расстояние между крайними кустами равно 90 дм.

б) Победителей олимпиады выстроили в ряд на сцене. Директор школы, поздравляя их, заметил, что пятым справа стоял Коля, выступивший лучше всех. Учитель же математики обратил внимание на то, что Коля стоял девятым слева. Сколько всего учеников стояло на сцене?

в) Во сколько раз лестница с первого этажа на шестнадцатый длиннее лестницы с первого на четвёртый этаж дома?

26. $\boxed{5}$ Гусеница ползёт по стволу яблони. За первый час она поднялась на 10 см, за второй час опустилась на 4 см, за третий час вновь поднялась на 10 см, а за четвёртый опустилась на 4 см. Так она продолжала подниматься и опускаться в течение нескольких часов. На сколько сантиметров поднимется гусеница за 11 ч?

27. $\boxed{5}$ По прямой дороге от деревни А до города М расположены последовательно четыре села: Б, В, Г, Д. Расстояние от А до В равно 15 км, от А до Д — 50 км, от Г до Б — 20 км, от Г до М — 30 км, а от В до Г — на 5 км меньше, чем от Д до Г. Найдите расстояние между каждой парой соседних населённых пунктов и расстояние от деревни А до города М.

28. $\boxed{6}$ а) У фермера было несколько одинакового веса поросят и несколько ягнят также одинакового веса. Мальчик спросил фермера, сколько весит один поросёнок и один ягнёнок. Фермер ответил, что 3 поросёнка и 2 ягнёнка весят 22 кг, а 2 поросёнка и 3 ягнёнка весят 23 кг. Как узнать, сколько весит один поросёнок и сколько весит один ягнёнок?

б) На прокорм 6 лошадей и 40 коров ежедневно отпускают 472 кг сена, а на прокорм 12 лошадей и 37 коров ежедневно отпускают 514 кг сена. Сколько потребуется сена при такой же ежедневной норме на прокорм 30 лошадей и 90 коров с 15 октября по 25 марта включительно? (Год не високосный.)

29. $\boxed{7}$ На пальме сидело много мартышек. Двадцать из них получили по пинку. Пнутая мартышка срывает с пальмы три финика и раздаёт подружкам. Мартышка, получившая два финика, съедает их и пинает другую мартышку. После того как произошло 30 новых пинков, мартышки успокоились. Сколько фиников осталось у мартышек?

30. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Пять участников олимпиады стали её победителями, набрав по 15, 14 и 13 баллов и заняв соответственно первое, второе и третье места. Сколько участников заняли каждое призовое место, если вместе они набрали 69 баллов?

$\boxed{7}$ б) В классе 25 учеников, а сумма их возрастов составляет 270 лет. Найдутся ли в классе 20 учащихся, сумма возрастов которых больше 260?

31. $\boxed{6}$ а) Пятизначное число A записывается только двойками и тройками, а пятизначное число B — только тройками и четвёрками. Может ли произведение AB записываться одними двойками? Не забудьте обосновать свой ответ.

б)★ Пятизначное число A записывается только двойками и единицами, а пятизначное число B — только тройками и двойками. Может ли произведение AB записываться одними шестёрками? Не забудьте обосновать свой ответ.

32. $\boxed{7}$ На поле брани встретились армии Толстых и Тонких по 1000 человек в каждой. Сначала каждый Толстый солдат выстрелил в одного из Тонких; затем каждый уцелевший Тонкий солдат выстрелил в одного из Толстых. После этого каждый уцелевший Толстый ещё раз выстрелил в одного из Тонких. Докажите, что в живых осталось не менее 500 солдат.

33. $\boxed{7}$ а) Гриб называют плохим, если в нём больше 11 червяков. Червяка называют тощим, если он съел не более $\frac{1}{5}$ гриба, в котором живёт. Четверть всех грибов в лесу — плохие. Докажите, что не менее трети всех червяков — тощие.

б) Гриб называют плохим, если в нём больше 15 червяков. Червяка называют тощим, если он съел не более $\frac{1}{7}$ гриба, в котором живёт. Одна пятая часть всех грибов в лесу — плохие. Докажите, что не менее четверти всех червяков — тощие.

Задачи с дробями

34. $\boxed{7}$ а) Сократите дробь $\dfrac{5^{21}+5^{21}+5^{21}+5^{21}+5^{21}}{5^{24}}$.

б) Вычислите $\dfrac{4^6\cdot 9^5+6^9\cdot 120}{8^4\cdot 3^{12}-6^{11}}$.

в) Вычислите значение выражения: $\dfrac{27^3\cdot 4^5}{6^8}-\dfrac{5^5\cdot 2^4}{10^4}-\dfrac{2^6\cdot 3^4}{6^4}$.

35. $\boxed{7}$ Дана пропорция $\dfrac{a}{b}=\dfrac{c}{d}$.

а) Докажите, что верна пропорция $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a+c}{b+d}$.

б) Верно ли, что также верна и пропорция $\dfrac{a}{b}=\dfrac{a\cdot c}{b\cdot d}$?

36. $\boxed{6}$ Делимое разделили на удвоенный делитель и получили 13,375. Когда же делимое разделили на удвоенное частное, то получили 4. Найти делимое и делитель.

37. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Вычислить $\dfrac{5}{6}+6\,\dfrac{5}{6}\cdot\left(11\,\dfrac{94}{1591}-6\,\dfrac{38}{1517}\right):8\,\dfrac{11}{43}$.

б) Вычислить $1\frac{1}{6}+6\frac{5}{6}\cdot\left(10\frac{133}{2173}-5\frac{23}{1643}\right):41\frac{12}{31}$.

в) Вычислить

$$\left(2\frac{2}{5}-\frac{2}{5}\cdot\left(1\frac{3}{4}+\frac{17:3125}{8:6250}\right)\right):\left(\left(2\frac{31}{42}+1\frac{5}{16}\right)\cdot 6\frac{3}{43}+5\frac{40}{43}\right).$$

38. 6-7 а) Вычислить

$$15\frac{120}{187}-5\frac{120}{143}-\frac{200}{2431}+\left(37\frac{11}{29}-37\frac{11}{29}\right):2\frac{13}{47}\cdot 100+50:21\frac{152}{163}.$$

б) Вычислить

$$2\frac{16}{143}-1\frac{131}{132}+2\frac{11}{13}:2\frac{2}{5}+18\frac{13}{17}\cdot\left(15\frac{3}{37}-15\frac{3}{37}\right):14\frac{15}{31}+8\frac{298}{429}.$$

в) Вычислить $\left(17\frac{3535}{88\,375}-16\frac{1001}{1365}\right)\cdot 3\frac{6}{23}+3\frac{6}{23}:\left(5-1\frac{187}{253}\right)$.

г) Вычислить $\left(13\frac{6105}{11\,211}-12\frac{9919}{18\,382}\right):1\frac{5}{1010}-2\frac{6}{17}\cdot\left(8-7\frac{2323}{4040}\right)$.

39. 6-7 а) Быстро вычислить $\dfrac{254\cdot 399-145}{254+399\cdot 253}$.

б) Быстро вычислить $\dfrac{5932\cdot 6001-69}{5932+6001\cdot 5931}$.

в) Быстро вычислить $\dfrac{423\,134\cdot 846\,267-423\,133}{423\,133\cdot 846\,267+423\,134}$.

40. 6-7 а) Быстро вычислить $333\cdot\left(\dfrac{71}{111\,111}+\dfrac{573}{222\,222}-\dfrac{2}{3\cdot 7\cdot 37}\right)$.

б) Вычислите

$$\frac{666\,666\cdot 666\,666}{1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1}-\frac{777\,777\cdot 777\,777}{1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1}.$$

41. 6-7 а) Быстро вычислить

$$182\cdot\left(\frac{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}+\frac{1}{27}}{2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}}:\frac{4-\frac{4}{7}+\frac{4}{49}-\frac{4}{343}}{1-\frac{1}{7}+\frac{1}{49}-\frac{1}{343}}\right)\cdot\frac{80\,808\,080}{91\,919\,191}.$$

б) Быстро вычислить

$$158\cdot\left(\frac{12-\frac{12}{7}-\frac{12}{289}-\frac{12}{85}}{4-\frac{4}{7}-\frac{4}{289}-\frac{4}{85}}:\frac{5+\frac{5}{13}+\frac{5}{169}+\frac{5}{91}}{6+\frac{6}{13}+\frac{6}{169}+\frac{6}{91}}\right)\cdot\frac{505\,505\,505}{711\,711\,711}.$$

42. 6-7 Выполните действия: $15{,}81:(24-23{,}66)-18:37{,}5$.

43. 6-7 Найдите наиболее рациональным способом значение выражения:

а) $25-\frac{3}{7}\cdot 7+\left(12\frac{23}{25}-4\frac{2}{5}\right)\cdot 25+125\cdot 357\cdot 0{,}008$;

б) $25\frac{3}{7}\cdot 7+\left(12\frac{23}{25}-4\frac{2}{5}\right)\cdot 25+125\cdot 357\cdot 0{,}008$;

в) $16{,}4\cdot 25-\frac{5}{8}\cdot\left(-9\,\frac{3}{5}\right)-(-2{,}5)\cdot 15{,}6-9{,}6\cdot\frac{5}{8}$;

г) $32\cdot 0{,}99\cdot 25\cdot 1{,}25+57\cdot 5\cdot\frac{2}{3}\cdot 25\cdot\frac{4}{19}$.

44. $\boxed{6\text{-}7}$ Найдите значение выражения:

а) $\left(\frac{810}{162}+\frac{675}{225}\right)\cdot\left(\frac{810}{162}-\frac{675}{225}\right)$;

б) $\left(\frac{1648}{1751}+\frac{131\,313}{686\,868}\right)\cdot\left(\frac{131\,313}{686\,868}-\frac{1648}{1751}\right)$;

в) $\left(\frac{1284}{1391}+\frac{212\,121}{656\,565}\right)\cdot\left(\frac{212\,121}{656\,565}-\frac{1284}{1391}\right)$.

45. $\boxed{6\text{-}7}$ Вычислить:

а) $\left(27^{10}-5\cdot 81^4\cdot 3^{12}+4\cdot 9^8\cdot 3^8\right):\left(41\cdot 3^{24}\right)$;

б) $\left(10^{12}+5^{11}\cdot 2^9-5^{13}\cdot 2^8\right):\left(4\cdot 5^5\cdot 10^6\right)$;

в) $\left(12\cdot 5^{2n+1}-8\cdot 5^{2n}+4\cdot 5^{2n-1}\right):\left(4\cdot 5^{2n-2}\right)$;

г) $\left(36\cdot 18^n-8\cdot 2^{n-1}\cdot 9^n-3^{n+1}\cdot 6^{n+1}\right):18^{n-1}$.

46. $\boxed{6\text{-}7}$ а) Быстро вычислить

$$\frac{1}{10\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 12}+\frac{1}{12\cdot 13}+\frac{1}{13\cdot 14}+\frac{1}{14\cdot 15}+$$
$$+\frac{1}{15\cdot 16}+\frac{1}{16\cdot 17}+\frac{1}{17\cdot 18}+\frac{1}{18\cdot 19}+\frac{1}{19\cdot 20}.$$

б) Быстро вычислить $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56}+\frac{1}{72}+\frac{1}{90}+\frac{1}{110}+\frac{1}{132}$.

в) Быстро вычислить $\frac{4}{5\cdot 7}+\frac{4}{7\cdot 9}+\frac{4}{9\cdot 11}+\frac{4}{11\cdot 13}+\ldots+\frac{4}{59\cdot 61}$.

г)* Быстро вычислить $\frac{7^2}{2\cdot 9}+\frac{7^2}{9\cdot 16}+\frac{7^2}{16\cdot 23}+\ldots+\frac{7^2}{65\cdot 72}$.

2. Метрическая система мер

Теоретический материал

Для успешного решения задач на площади и объёмы необходимо вспомнить соотношения между метрическими величинами:

1 км = 1000 м; 1 м = 10 дм = 100 см = 1000 мм;

1 дм = 10 см; 1 см = 10 мм;

1 га = 10 000 м^2; 1 м^3 = 1000 л; 1 л = 1 дм^3 = 1000 см^3.

Также пригодятся следующие формулы.

Площадь прямоугольника равна произведению его длины на ширину.

Периметр прямоугольника равен сумме всех его сторон или удвоенной сумме его длины и ширины.

Объём прямоугольного параллелепипеда равен произведению его ширины на длину и на высоту.

[. . .]

Федотов Михаил Валентинович — кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической физики, заместитель декана по учебной работе факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Область научных интересов: математическая физика, дифференциальные уравнения, численные методы, математические модели нелинейной оптики. Автор более 100 научных и учебно-методических работ.

Организовал и долгое время возглавлял Учебный центр факультета (1998–2014), в состав которого входят подготовительные курсы.

Золотарёва Наталья Дмитриевна — кандидат физико-математических наук, научный сотрудник факультета ВМК МГУ имени М. В. Ломоносова. Преподаватель подготовительных курсов МГУ, член экзаменационной комиссии МГУ. Область научных интересов: адаптивно измельчаемые сетки для решения обыкновенных дифференциальных уравнений, оценка погрешности численных методов для решения ОДУ.

Является сертифицированным экспертом ГИА-11 по математике. Автор более 50 научных и учебно-методических работ.

ВМК МГУ – ШКОЛЕ

Серия книг **«ВМК МГУ–школе»** – результат многолетнего труда коллектива авторов, работающих на подготовительных курсах факультета вычислительной математики и кибернетики (ВМК) МГУ имени М. В. Ломоносова. В серию входят пособия по алгебре, геометрии, физике и информатике. Все они предназначены для подготовки и успешной сдачи ГИА и ЕГЭ, а также поступления в престижные вузы страны.

Олимпиадная математика – новое направление серии «ВМК МГУ–школе». Его основная задача – научить школьников всех возрастов решать задачи повышенной сложности.

Настоящее пособие предназначено для учащихся 5–7 классов и является первым в серии пособий по олимпиадным математическим задачам. Будут выпущены ещё несколько книг для 5–7 классов – по другим разделам математики, а также сборники задач для 8–9 и 10–11 классов.

Большинство олимпиадных задач, особенно для младшей и средней школы, не намного сложнее обычных школьных задач по математике. Поэтому не бойтесь их. Они только все вместе выглядят страшными, а каждая задача по отдельности вполне вам по силам. Берите их и решайте!