

Оглавление

Предисловие	5
Перспектива	8
Формальный подход	11
Гармоническая четвёрка точек	15
Двойное отношение	17
Построение гармонической четвёрки	20
Гармонический четырёхвершинник	24
Проективная двойственность	28
Полюсы и поляры (алгебра)	29
Полюсы и поляры (геометрия)	31
Поляры и гармонические четвёрки	34
Построение поляры одной линейкой	36
Поляры и элементарная геометрия	39
Проективные преобразования прямой	42
Теорема Дезарга	45
Проективные отображения прямых и теорема Паппа	49
Коники	54
Коники и двойное отношение	57
Проективное определение коники	61
Теорема Паскаля	65
Проективные преобразования плоскости	67
Гармоническая инволюция	70
Проективные отображения коник	74
Проективное отображение коники на себя	76
Задачи на построение	81
Инволюции прямой	86
Вторая теорема Дезарга	91
Построения в перспективе	96
Групповой подход к геометрии	103
Геометрия Лобачевского	104

Модель Кэли — Клейна	106
Формула для расстояния	111
Окружности и другие циклы	114
Заключение	118

Предисловие

Содержание школьного курса геометрии не слишком сильно изменилось по сравнению с «Началами» Евклида. Первые главы учебника начинаются с измерения отрезков и углов, потом идёт равенство треугольников, потом возникают различные формулы, связывающие между собой эти длины и углы. Появляются подобие, площади, с ними новые формулы и новые задачи, где одни размеры даны, а другие требуется найти. Фактически идея измерения, числа как важнейшей характеристики геометрических фигур пронизывает всю евклидову геометрию. Длина отрезка, величина угла, отношение отрезков, площадь, объём — всё это числа. Неудивительно, ведь в самом названии $\gamma\epsilon\omega\mu\epsilon\tau\rho\acute{\iota}\alpha$, то есть «землемерие», есть корень «метр» — измерять. Вот практическая задача, с которой всё начиналось: точно узнать размер участка земли.

Что останется от элементарной геометрии, если убрать из неё измерения? Что можно сказать о геометрической фигуре, если неизвестны её размеры? Возможно, в голову приходит что-то вроде теоремы о том, что медианы или высоты любого треугольника (независимо от его сторон и углов) пересекаются в одной точке. Но в определении медианы участвует середина стороны. Как определить середину отрезка, не пользуясь понятием длины или отношения? Как определить перпендикулярность прямых, не используя равенства углов? Хочется определить равенство фигур, как в «Началах» Евклида, через наложение: «И совмещающиеся друг с другом равны между собой». Но как строго определить «наложение» или «совмещение», не используя при этом измерений и числовых величин: длины отрезка или меры угла? Возможно ли это?

На первый взгляд изъять из элементарной геометрии любые измерения невозможно. По крайней мере, в «Началах» нет теорем, не использующих никаких измерений, хотя бы косвенно. Однако на самом деле такие теоремы существуют, хотя сформулировать их совсем не просто. Интересно, как возникла потребность в таких неочевидных утверждениях и зачем нужна геометрия, которая не измеряет ни длин, ни углов (именно эту геометрию и называют проективной).

Можно сказать, что классическая геометрия возникла для решения сугубо экономической задачи: разделить землю на участки. А проективная геометрия появилась как инструмент для решения творческой задачи. В эпоху Возрождения у художников появилась потребность изображать на холсте окружающий мир так, как мы его видим, как говорят — в перспективе.

На первый взгляд основную закономерность перспективного изображения описать несложно: чем дальше предмет от наблюдателя, тем меньше его изображение. В самом деле, представьте себе фотоснимок ряда одинаковых столбов вдоль шоссе. Чем дальше столб, тем меньше он на снимке, хотя в реальности они все одинаковы. А самые дальние столбы вообще сжимаются в точку.

Сначала художники, не мудрствуя лукаво, просто изображали предметы по принципу: чем дальше, тем меньше. Насколько меньше? А как подсказывают глазомер и интуиция. Однако в сложных случаях одной интуиции недостаточно: на глазок правильно изобразить большую комнату с мебелью и многими фигурами людей не выходит. А если на полу выложена мозаика, или хотя бы просто ровная квадратная плитка со сторонами, не параллельными краю картины, что тогда? Надо как-то равномерно сжимать её в глубину, но что значит «равномерно»? Вот тут и возникает геометрия.

В самом деле, на перспективном изображении теряется равенство отрезков и углов, отношения отрезков тоже становятся другими. Даже параллельные прямые начинают сходиться к горизонту, появляется, как говорят художники, «точка схода». Её нет в окружающем нас мире: ведь рельсы не пересекаются. Но на картине они прекрасно пересекаются на линии горизонта. Кстати, а что это за линия? Её ведь тоже нет, она иллюзорна... Как же изображать на картине отсутствующие в природе вещи, добиваясь максимального правдоподобия? И вообще, как устроено правильное перспективное изображение?

Примерно таким был первоначальный вопрос, вызвавший потребность в иной, проективной, геометрии, во многом непохожей на классическую геометрию «Начал». Дальше всё развивалось по схеме, привычной для математики. Исходные потребности быстро исчерпались, а сама теория оказалась гораздо богаче, чем предполагалось. И как евклидова геометрия ушла далеко от своего истока, землемерия, так и проективная геометрия стала полноценным разделом математики, гораздо более глубоким, чем теория перспективы.

Период бурного развития проективной геометрии — XIX век. К началу XX века она уже была стройной законченной теорией.

«Милостивые государи! Между приобретениями, сделанными в области геометрии за последние пятьдесят лет, развитие проективной геометрии занимает своё место». Этими словами в 1872 г. Феликс Клейн начал свою знаменитую лекцию, вошедшую в историю математики как Эрлангенская программа. К этому времени Клейн уже

показал, как из наиболее общей проективной геометрии получить и евклидову геометрию, и неевклидову геометрию Лобачевского.

Все важнейшие связи были найдены, все конструкции построены и обоснованы, и тогда проективная геометрия потихоньку перешла в область фундаментальной общеизвестной классики.

Сегодня классическая проективная геометрия находится на «ничей земле». Замечательно красивые геометрические теоремы с изящными неожиданными чертежами слишком сложны для средней школы, а в университетском курсе на них, как правило, не хватает времени.

Эта книга написана прежде всего для того, чтобы хоть немного закрыть этот пробел и познакомить читателя с важными конструкциями и знаменитыми теоремами проективной геометрии. Для её понимания не требуется никаких специальных знаний сверх обычной школьной геометрии в объёме девяти классов. Книга рассчитана на любознательного старшеклассника или первокурсника, интересующегося геометрией. Опыт автора говорит, что такие ученики ещё встречаются. Некоторые главы написаны по материалам лекций Летней математической школы лицея Л2Ш.

Я благодарен К. В. Козеренко за то, что он убедил меня написать эту книгу, а также за плодотворные обсуждения и помощь во время её написания.

Перспектива

Каким мы видим окружающий нас мир? Далёкие объекты нам кажутся мелкими, близкие — крупными, железнодорожные рельсы — сходящимися к горизонту. На изображении куба рёбра не только не образуют прямых углов, но даже не параллельны. На фотографии высотного здания, сделанной с близкого расстояния, контуры ощутимо сжимаются.

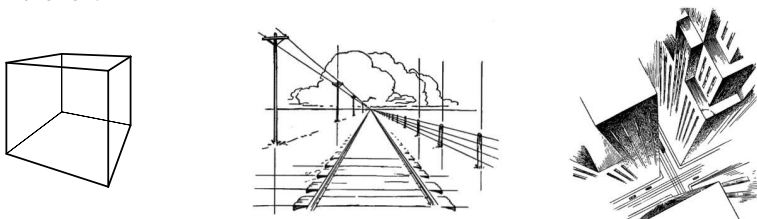


Рис. 1

Адекватной математической моделью, описывающей эти явления, является центральная проекция.

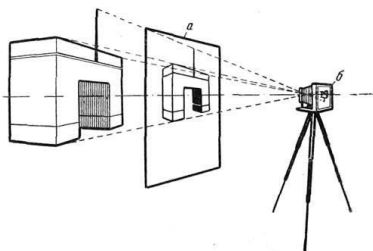


Рис. 2

Изучение центральной проекции, или перспективы, начали художники ещё в XIV–XV вв. Они хотели, чтобы изображение на холсте совпадало с тем, что мы реально видим. Очень скоро была решена задача построения так называемого перспективного изображения. Для этого были разработаны наборы эмпирических правил, составлены сборники внутрицеховых ремесленных рецептов. Потом за дело взялись математики, что привело к появлению проективной геометрии, про которую А. Кэли в конце XIX века сказал, что проективная геометрия — это вся геометрия.

Чтобы понять, как устроена перспектива, попробуем, например, изобразить на плоскости холста две параллельные прямые (рельсы, лежащие на земле). Главное требование: сделать так, чтобы лучи, про-

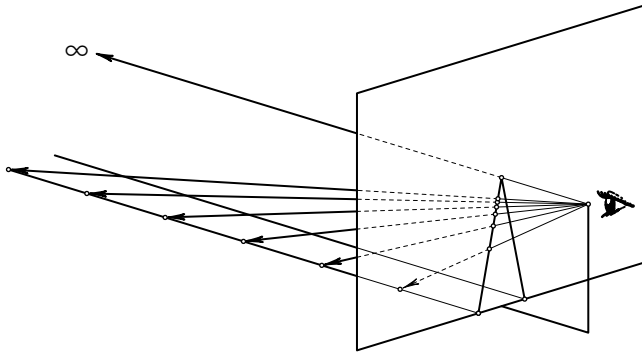


Рис. 3

ведённые от глаза к изображению на холсте, шли точно так же, как лучи, проведённые от глаза к двум лежащим на земле рельсам. Точка, в которой находится глаз, будет центром проекции. Проведём из неё прямые к точкам, лежащим на рельсах (рис. 3). Эти прямые пересекут плоскость картины, и точки пересечения образуют изображение рельсов. Однако прямые на изображении не будут параллельными. Они пересекутся в некоторой точке. Ясно, что эта точка на холсте не соответствует никакой точке на земле (рельсы, конечно, не пересекаются). В самом деле, луч, проходящий через точку пересечения прямых на холсте, параллелен земле и рельсам. Чтобы точка на холсте была как можно ближе к точке пересечения, соответствующая ей точка на рельсе должна уйти как можно дальше от плоскости холста. Чем дальше мы отодвигаем эту точку по рельсу, тем ближе её изображение к точке пересечения на холсте. Но попасть в эту «фиктивную» точку, очевидно, невозможно. Можно лишь подойти к ней как угодно близко, отодвигая точку на рельсе «в бесконечность».

Здесь мы построили центральную проекцию параллельных рельсов на плоскость картины. Центр проекции — глаз наблюдателя. Видно, что при центральной проекции параллельные прямые могут превратиться в пересекающиеся. При этом на картине возникает «точка схода», которой не соответствует никакая реальная точка.

Теперь совершенно ясно, откуда берётся стандартная фраза из книг по проективной геометрии: «Будем считать, что параллельные прямые пересекаются в бесконечно удалённой точке». Геометры XIX века, начиная с Ж. В. Понселе («Трактат о проективных свойствах фигур», 1822), добавляли к обычной евклидовой плоскости так называемые идеальные (бесконечно удалённые) элементы, не имея в виду при

этом никакой геометрической интерпретации. Просто считалось, что эти виртуальные точки не видны, когда прямые параллельны, но при центральной проекции, как в примере с рельсами, могут переходить в обычные точки на плоскости. Сделать эту конструкцию логически непротиворечивой и формально корректной не так уж сложно — правда, для этого придётся выйти в трёхмерное пространство. Мы отложим пока формальное обоснование и примем наивную точку зрения.

Итак, мы будем считать, что

1. К каждой прямой добавлена ровно одна бесконечно удалённая точка. В результате прямая становится замкнутой линией.
2. У параллельных прямых бесконечно удалённая точка одна и та же. Другими словами, все прямые, параллельные между собой, образуют «пучок с центром в бесконечно удалённой точке».
3. Все бесконечно удалённые точки лежат на бесконечно удалённой прямой (в теории перспективы — линия горизонта)

При этом важно понимать, что при помощи центральной проекции мы можем сделать бесконечно удалённые элементы видимыми или, наоборот, видимые точки «увести на бесконечность».

Для примера возьмём вот такую конфигурацию из девяти прямых (рис. 4а).

Докажем, что точки A, B, M лежат на одной прямой. Если пытаться это делать «в лоб», непосредственно по чертежу, видимо, потребуются несколько раз применить теорему Менелая. Но если посмотреть на чертёж как на изображение с рельсами и шпалами в перспективе, где MN — линия горизонта, или, как говорят «увести прямую MN на бесконечность», получая конфигурацию на рис. 4б, всё становится понятно. Косые четырёхугольники превращаются в параллелограммы, а три прямые, сходящиеся в точке M , превращаются в три па-

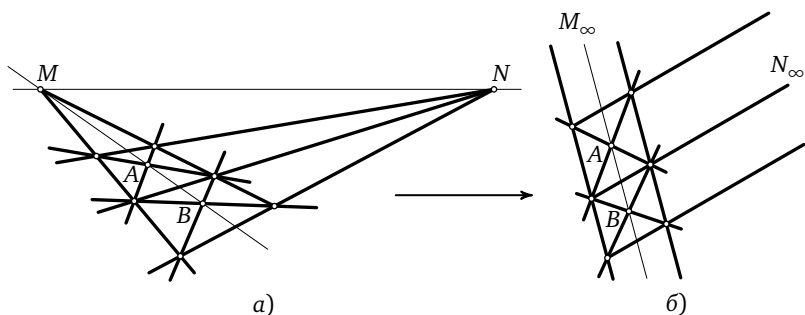


Рис. 4

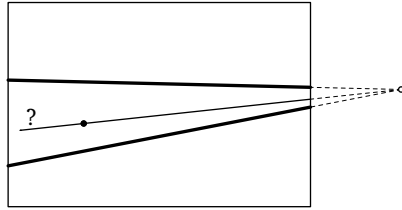


Рис. 5

параллельные, сходящиеся в бесконечно удалённой точке M_∞ . А уж параллельность этих трёх прямых без труда докажет любой школьник, изучивший свойства средней линии.

Задача. На листе бумаги изображена точка и две прямые, однако их точка пересечения лежит за пределами листа (рис. 5). Выполняя построения на этом листе, надо начертить прямую, которая проходит через данную точку и недоступную точку пересечения данных прямых. Оказывается, можно обойтись без циркуля, выполняя построения одной линейкой.

Задача. Перед вами изображение квадрата в перспективе (рис. 6). Как видите, параллельные стороны сходятся на линии горизонта. Используя этот квадрат как образец, продолжите изображение до паркета из одинаковых квадратных плиток. (Художники эпохи Возрождения умели это делать, ещё не зная проективной геометрии.)

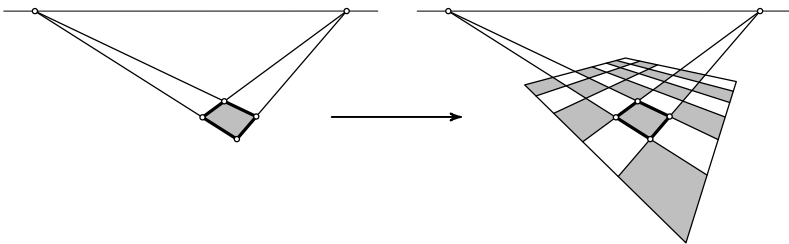


Рис. 6

Формальный подход

Как это часто бывает в истории, логически аккуратное определение проективной прямой и проективной плоскости появилось гораздо позже, чем интуитивное понимание, что обычную евклидову плоскость можно каким-то образом расширить. У этой идеи были и сторонники, и противники.

Сторонники опирались на геометрическую наглядность, ведь художники уверенно изображали параллельные линии сходящимися на горизонте, чтобы плоское изображение выглядело объёмным. Должно быть математическое объяснение этого эффекта, и «точку схода» на перспективном изображении естественно считать изображением «бесконечно удалённой точки», в которой пересекаются параллельные прямые.

Противники справедливо замечали, что на той плоскости, которая описана в «Началах» Евклида, нет никаких бесконечно удалённых точек, а параллельные прямые не пересекаются по определению. К тому же непонятно, сколько таких виртуальных точек нужно добавить? Одну, две, несколько или бесконечно много? А если их бесконечно много, почему они лежат на одной прямой, хотя бы и бесконечно удалённой? Горизонт, между прочим, — замкнутая линия. А разве прямая замкнута?

На все эти вопросы отвечает формальное определение проективной плоскости. Задним числом понятно, почему оно появилось достаточно поздно. При всей логической строгости, это определение в достаточной мере абстрактно и лишено наглядности. Чтобы в нём разобраться, начнём с проективной прямой.

Рассмотрим полный набор (пучок) прямых, проходящих через одну точку O . Все эти прямые, конечно, нельзя нарисовать, поскольку прямые пучка заполняют всю евклидову плоскость. Но рассмотреть множество прямых, проходящих через точку O (центр пучка), вполне возможно. Проведём теперь новую прямую l , не проходящую через центр, и рассмотрим точки её пересечения с прямыми, входящими в пучок. Мы видим, что она пересекает все прямые пучка, кроме одной. Лишь для одной прямой, параллельной l , не найдётся точки пересечения (рис. 7).

Это не удивительно, поскольку на евклидовой плоскости через точку O проходит ровно одна прямая, параллельная прямой l . Каждый раз, проводя прямую l по-новому, мы будем пересекать все прямые пучка,

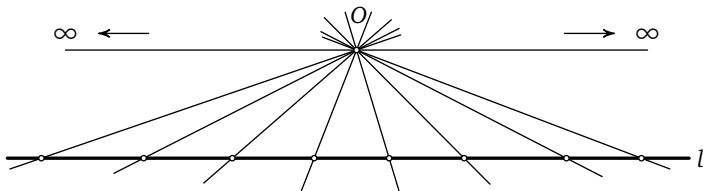


Рис. 7

кроме одной. Стало быть, каждой точке прямой l соответствует ровно одна прямая пучка, которая через неё проходит, но для одной-единственной прямой пучка соответствующей точки на прямой l нет.

Хочется сказать, что точек на прямой l на одну меньше, чем прямых в пучке. Будь на прямой ещё одна дополнительная точка, всё сошлось бы: соответствие между прямыми пучка и точками прямой l стало бы взаимно однозначным, а прямая стала бы замкнутой, как окружность. Заметьте, нам не нужны две отдельные точки для $+\infty$ и $-\infty$. Двигая точку по прямой как направо, так и налево, мы приближаем соответствующую прямую пучка к одной и той же прямой, параллельной l . Хватит и одной точки для $\pm\infty$. Только где же такую точку взять?

И тут мы делаем шаг, обычный для математики XIX века, но ещё немыслимый в веке XVII. Назовём пучок прямых *проективной прямой*. Просто дадим ему новое имя.

Определение. Проективная прямая — это пучок евклидовых прямых, проходящих через одну точку. Проективная точка — это одна прямая пучка.

А обычную прямую l , на которой не хватает одной точки, назовём *картой* для проективной прямой. На этой карте как раз не помещается ровно одна проективная точка (прямая из пучка, параллельная прямой l).

Проективную плоскость можно определить похожим образом. Рассмотрим пучок прямых, проходящих через одну точку O в трёхмерном евклидовом пространстве. Каждую такую прямую назовём *проективной точкой*. Подмножества в этом пучке, состоящие из прямых, лежащих в одной плоскости (плоские пучки), назовём по-прежнему *проективными прямыми*. А все проективные точки составляют *проективную плоскость*.

Ход рассуждений, приводящий к такому неочевидному определению, можно представить примерно так. Если мы хотим изображать один и тот же объект, например рельсы, на разных холстах, можно один раз выбрать центр проекции, провести из него прямые к точкам этих рельсов, а потом пересекать их то одной плоскостью, то другой, получая разные изображения на разных холстах. В этой конструкции главную роль играют именно прямые пучка, а выбор плоскости «холста» не имеет принципиального значения.

В проективной геометрии плоскость «холста», не проходящую через центр пучка O , принято называть *картой* проективной плоскости. Прямые пучка (проективные точки) пересекают карту, оставляя следы

в виде точек. Плоскости (проективные прямые) оставляют на карте следы в виде прямых. Однако некоторые прямые пучка не пересекают карту. Все эти прямые лежат в одной плоскости, параллельной карте. А плоскость мы назвали проективной прямой. Вот и получилась бесконечно удалённая прямая, состоящая из бесконечно удалённых точек. С одним важным дополнением: бесконечно удалённых по отношению к данной карте.

Все прямые пучка (проективные точки) абсолютно равноправны. Отличаются они лишь расположением по отношению к выбранной карте. Проведём другую карту — и бесконечно удалёнными станут уже другие точки. Также мы потеряли и понятие параллельности: любые две плоскости (проективные прямые), проходящие через точку O , имеют общую прямую (проективную точку). На одной карте эти плоскости могут оставить параллельные следы (точка ушла в бесконечность), на другой — следы пересекаются. Но это зависит лишь от выбора карты. На проективной плоскости любые две прямые пересекаются в проективной точке.

На рис. 8 можно видеть, как две плоскости (проективные прямые) β_1, β_2 пересекают карту α , оставляя параллельные следы — прямые b_1, b_2 . А пересечение этих плоскостей (проективных прямых) — это прямая b_∞ , параллельная карте α (проективная точка, бесконечно удалённая по отношению к карте α).

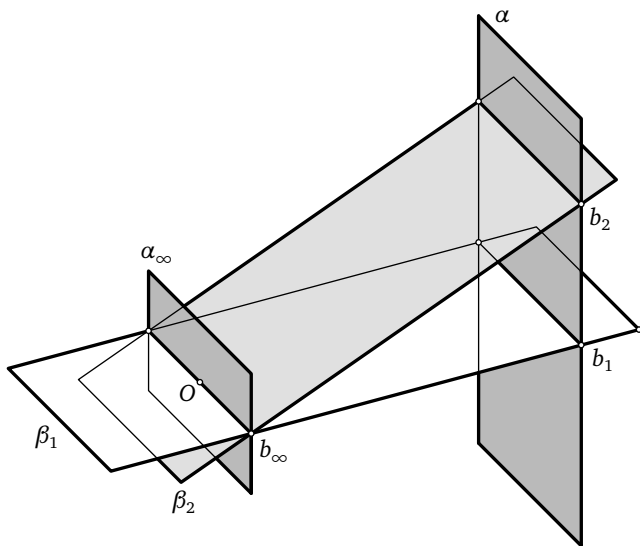


Рис. 8

Вот теперь всё встало на свои места. Наконец утверждение «параллельные прямые пересекаются в бесконечно удалённой точке» можно считать вполне осмысленным и непротиворечивым.

В дальнейшем будем изображать чертежи на обычной евклидовой плоскости, в случае необходимости вспоминая, что в запасе есть ещё бесконечно удалённые точки.

Задача. Сколько надо карт, чтобы «увидеть» все проективные точки (чтобы каждая проективная точка была изображена хотя бы на одной карте)?

Задача. Прямая на любой карте изображается как прямая. Как на разных картах по-разному изобразится а) отрезок; б) внутренность треугольника?

Задача. На сколько частей делят проективную плоскость а) две прямые; б) три прямые?

Гармоническая четвёрка точек

Важным инструментом в наших исследованиях станет гармоническая четвёрка точек. Она состоит из четырёх точек, лежащих на одной прямой. Не любых, конечно же, а расположенных особым образом. Точно так же и гармоническая четвёрка прямых состоит из четырёх прямых, проходящих через одну точку, опять расположенных особым образом. Казалось бы, какой смысл выделять какие-то особые расположения именно для четырёх точек или четырёх прямых? Дело в том, что, как мы увидим в дальнейшем, все тройки точек на проективной прямой в некотором смысле одинаковы. Поэтому будем рассматривать четвёрки.

Начнём с совсем простой задачи, доступной ученикам 5–6 класса. На прямой даны точки A и B , надо построить на этой прямой такую точку X , чтобы она была в 3 раза ближе к точке B , чем к точке A . И в самом деле, это сделать очень просто. Делим отрезок AB на 4 равные части и берём точку деления X , ближайшую к точке B (рис. 9). Отрезок AB поделится в отношении 3 : 1, значит, точка X в 3 раза

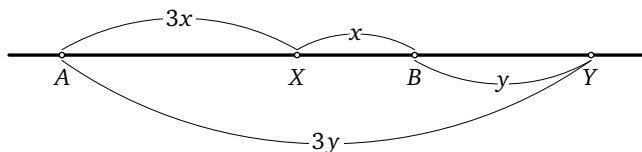


Рис. 9

ближе к точке B , чем к точке A , или $\frac{AX}{XB} = 3$. Всё? Конечно, нет. Есть и другая точка, назовём её Y , которая обладает тем же свойством, но лежит снаружи отрезка AB . Чтобы её построить, надо отложить за точку B половину отрезка AB . Теперь расстояние BY равно $\frac{1}{2}AB$, а расстояние AY составляет $\frac{3}{2}AB$. Получается, что $\frac{AY}{YB} = 3$. Получили две точки X, Y , для которых $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB}$. Перед нами гармоническая четвёрка точек $ABXY$.

Конечно, отношение, равное именно 3, мы взяли лишь для примера. Теперь можно дать общее определение гармонической четвёрки точек (хотя в дальнейшем его придётся уточнить).

Определение. Четыре различные точки A, B, X, Y , лежащие на одной прямой, образуют гармоническую четвёрку, если $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB}$.

Также говорят, что пары точек AB и XY гармонически разделяют друг друга. Дело в том, что пропорции

$$\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB} \quad \text{и} \quad \frac{XA}{AY} = \frac{XB}{BY}$$

эквивалентны (перемножьте накрест и убедитесь). Первая из них говорит о том, что точки X и Y делят отрезок AB в одном и том же отношении, а вторая — о том, что точки A и B тоже делят отрезок XY в одинаковых отношениях. При этом точки двух пар должны чередоваться.

Задача. Пусть две общие касательные к окружностям с центрами A и B пересекают прямую AB в точках X и Y (рис. 10). Докажите, что $ABXY$ — гармоническая четвёрка (воспользуйтесь определением).

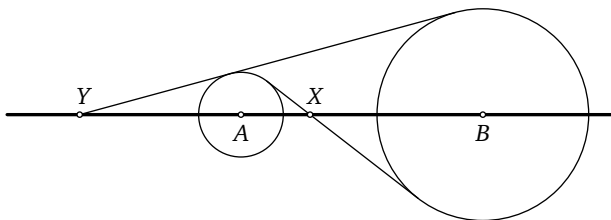


Рис. 10

Вот ещё один важный пример, который пригодится в дальнейшем. Построим на основании AB какой-нибудь неравнобедренный треугольник ABC и проведём через вершину C две биссектрисы: внутреннюю и внешнюю (рис. 11). Пусть они пересекают прямую AB в точ-

Как это часто бывает, имеет смысл доказывать более общую теорему, к тому же эта общая теорема пригодится и в дальнейшем. Перепишем равенство $\frac{AX}{XB} = \frac{AY}{YB}$ в виде $\frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB} = 1$ и рассмотрим величину $\frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB}$ для произвольных точек $ABXY$, лежащих на одной прямой. Эту величину называют *двойным отношением четырёх точек*. Впервые её рассмотрел Папп, последний великий геометр античности (III в. н. э.). Ему же принадлежит и теорема об основном инварианте центральной проекции.

Теорема. При центральной проекции прямой l на прямую l' двойное отношение четырёх точек сохраняется:

$$\frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB} = \frac{A'X'}{X'B'} : \frac{A'Y'}{Y'B'}.$$

Доказательство. Рассмотрим четыре точки A, B, X, Y , лежащие на одной прямой l , и четыре проходящие через них прямые a, b, x, y , принадлежащие одному пучку с центром O . Заменяем теперь отношения отрезков на отношения площадей треугольников с вершиной O , поскольку высота у всех этих треугольников одна и та же:

$$\frac{AX}{XB} : \frac{AY}{YB} = \frac{S(OAX)}{S(OXB)} : \frac{S(OAY)}{S(OYB)}.$$

С другой стороны, можно выразить площади треугольников по формуле

$$S(OAB) = \frac{1}{2} OA \cdot OB \cdot \sin \angle ab.$$

Тогда величины OA, OB, OX, OY сократятся и отношение площадей окажется равным отношению синусов:

$$\frac{S(OAX)}{S(OXB)} : \frac{S(OAY)}{S(OYB)} = \frac{\sin \angle ax}{\sin \angle xb} : \frac{\sin \angle ay}{\sin \angle yb}.$$

Получается, мы выразили двойное отношение отрезков через «двойное отношение» синусов углов между четырьмя прямыми. Значит, пересекая эту четвёрку прямых новой прямой l' или любой другой прямой, мы будем получать четвёрку точек с одним и тем же двойным отношением, равным двойному отношению четырёх синусов. Теорема доказана. $\square$

В частности, гармоническая четвёрка при проекции переходит в гармоническую четвёрку. Это означает, что при любых построениях в перспективе гармоническая четвёрка остаётся гармонической.

Теперь можно дать парное определение.

Определение. Четыре различные прямые a, b, x, y , проходящие через одну точку, образуют *гармоническую четвёрку*, если

$$\frac{\sin \angle ax}{\sin \angle xb} = \frac{\sin \angle ay}{\sin \angle yb}.$$

На практике, конечно, гармоническую четвёрку прямых обычно получают, соединяя выбранный центр с гармонической четвёркой точек. Верно и обратное: пересекая гармоническую четвёрку прямых произвольной прямой, получаем в пересечении гармоническую четвёрку точек. Это — первый пример проективной двойственности, о которой мы поговорим немного позже. Заметим также, что, определив гармоническую четвёрку четырёх прямых, мы тем самым определили гармоническую четвёрку четырёх *проективных точек*.

Однако нам необходимо уточнить определение двойного отношения. Дело в том, что античная математика не знала отрицательных чисел, поэтому при использовании двойного отношения приходилось каждый раз указывать, лежат ли точки X, Y на отрезке AB или снаружи. Чтобы избежать этого неудобства, будем вместо отрезков рассматривать векторы и считать отношение $AX : XB$ положительным, если векторы $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{XB}$ направлены в одну сторону, и отрицательным, если в разные.

Таким образом, введём обозначение для двойного отношения четырёх точек со знаком:

$$(ABXY) = \frac{\overrightarrow{AX}}{\overrightarrow{XB}} : \frac{\overrightarrow{AY}}{\overrightarrow{YB}}.$$

Фиксируя три точки A, B, X , мы получаем для каждой точки Y на проективной прямой единственное значение двойного отношения $(ABXY)$. Это означает, что мы ввели на прямой проективную систему координат, где каждой точке соответствует число. В частности, число можно сопоставить и бесконечно удаленной точке: если точка Y такова, то мы считаем, что $\overrightarrow{AY} : \overrightarrow{YB} = -1$ (поскольку если точка Y находится далеко от A, B и X , то векторы $\overrightarrow{AY}$ и $\overrightarrow{YB}$ направлены в разные стороны, и чем точка Y дальше, тем отношение длин $AY : YB$ ближе к единице). Проективная система координат принципиально отличается от привычных нам координат на прямой, поскольку точка Y может быть и бесконечно удаленной, однако для этого случая на обычной координатной прямой никакого числа не существует. Заметим, что на евклидовой прямой система координат задаётся двумя точками, соответствующими числам 0 и 1. А вот на проективной прямой для задания системы координат нужны уже три точки.