
У Ч Е Б Н И К И
ВЫСШЕЙ ШКОЛЫ ЭКОНОМИКИ

ВШЭ
HSE

А.В.Захаров

**ТЕОРИЯ ИГР
В ОБЩЕСТВЕННЫХ
НАУКАХ**

*Рекомендовано
Финансовым университетом
при Правительстве Российской Федерации
к использованию в качестве учебника
в образовательных учреждениях,
реализующих образовательные программы ВПО
по дисциплине «Дополнительные главы теории игр»
по направлениям подготовки 080000
«Экономика и управление»*



Издательский дом
Высшей школы экономики

Москва, 2015

УДК 519.813:303.7
ББК 22.1я7
3-38

Рецензент — проректор по магистратуре и аспирантуре
Финансового университета при Правительстве Российской Федерации,
доктор экономических наук, профессор
Л.И. Гончаренко

Научный редактор — доктор физико-математических наук
А.В. Савватеев

Захаров, А. В. Теория игр в общественных науках [Текст] : учебник для
3-38 вузов / А. В. Захаров ; Нац. исслед. ун-т «Высшая школа экономики». — М. :
Изд. дом Высшей школы экономики, 2015. — (Учебники Высшей школы эконо-
номики). — 304 с. — 1500 экз. — ISBN 978-5-7598-1180-0 (в пер.).

В учебнике излагаются основы некооперативной теории игр и разбираются при-
меры из различных областей экономики и политической науки. Для понимания
материала необходимо знание математического анализа и теории вероятностей на
уровне первого курса.

Книга может быть использована как основной учебник по семестровому курсу
теории игр для студентов бакалавриата или магистратуры, не изучавших предмет ран-
нее, или для более короткого повторного курса.

УДК 519.813:303.7
ББК 22.1я7

Учебное издание
Серия «Учебники Высшей школы экономики»

Алексей Владимирович Захаров

Теория игр в общественных науках

Зав. редакцией *Е.А. Бережнова*
Редактор *И.Л. Легостаева*
Художественный редактор *А.М. Павлов*
Компьютерная верстка и графика: *И.Г. Андреева*
Корректор *И.Л. Легостаева*

Подписано в печать 28.11.2014. Формат 70×100/16. Печать офсетная
Усл.-печ. л. 24,7. Уч.-изд. л. 22,0. Тираж 1500 экз. Изд. № 1771

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
101000, Москва, ул. Мясницкая, 20. Тел./факс: (499) 611-15-52

Отпечатано в ОАО «Первая Образцовая типография»
Филиал «Чеховский Печатный Двор»
142300, Московская обл., г. Чехов, ул. Полиграфистов, д. 1
www.chpd.ru, e-mail: sales@chpd.ru, тел.: 8 (495) 988-63-76, тел./факс: 8 (496) 726-54-10

ISBN 978-5-7598-1180-0

© Захаров А.В., 2015
© Оформление. Издательский дом
Высшей школы экономики, 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие научного редактора	6
Предисловие	8
Глава 1. Статические игры с полной информацией	11
1.1. Статические игры с полной информацией: чистые стратегии	12
1.1.1. Игры в нормальной форме	13
1.1.2. Доминирование	14
1.1.3. Последовательное удаление доминируемых стратегий	18
1.1.4. Равновесие Нэша	21
1.1.5. Функции реакции	24
1.1.6. Равновесие Нэша и доминирование	27
1.1.7. Примеры	29
1.2. Смешанные стратегии и существование равновесия	39
1.2.1. Определение смешанных стратегий	39
1.2.2. Равновесие в смешанных стратегиях	41
1.2.3. Интерпретация смешанных стратегий и равновесий	46
1.2.4. Смешанное равновесие в антагонистической игре $2 \times M$	50
1.3. Непрерывные игры	52
1.3.1. Теоремы о существовании равновесия	52
1.3.2. Примеры	55
Приложение. Доказательство теоремы Нэша	62
1.4. Задачи	64
Список литературы к главе 1	76
Глава 2. Динамические игры с полной информацией	79
2.1. Игры в развернутой форме	80
2.1.1. Дерево игры	80
2.1.2. Информационные множества и стратегии в динамической игре	81
2.1.3. Игры с совершенной информацией	86
2.1.4. Смешанные стратегии в динамической игре	94
2.1.5. Совершенство по подыграм	98
2.1.6. Примеры	100
2.2. Повторяющиеся игры	117
2.2.1. Игры, повторяющиеся конечное число раз	117
2.2.2. Бесконечно повторяющиеся игры	120

2.2.3. Примеры	128
2.2.4. Модель последовательного торга	133
Приложения	139
А. Определение игры в развернутой форме	139
Б. Доказательство теоремы о существовании равновесия в играх с совершенной информацией	140
В. Определение подыгры	141
2.3. Задачи	141
Список литературы к главе 2.	153
Глава 3. Статические игры с неполной информацией.	156
3.1. Байесовы игры.	156
3.1.1. Определения.	158
3.1.2. Примеры	168
3.1.3. Равновесие дискретного отклика.	181
3.2. Дизайн механизмов	187
3.2.1. Определения.	188
3.2.2. Нэш-реализуемость механизмов	189
3.2.3. Реализуемость в доминирующих стратегиях.	194
3.2.4. Введение в теорию аукционов	199
3.2.5. Эквивалентность доходов в аукционах	210
Приложение. Теорема Эрроу о диктаторе	216
3.3. Задачи	218
Список литературы к главе 3.	225
Глава 4. Динамические игры с неполной информацией.	228
4.1. Определение равновесий и их существование.	229
4.1.1. Сильное и слабое секвенциальное равновесие.	231
4.1.2. Совершенное (относительно «дрожащей руки») равновесие	234
4.1.3. Игры с наблюдаемыми действиями.	236
4.2. Сигнальные игры	238
4.2.1. Определение.	239
4.2.2. Простой пример сигнальной игры	240
4.2.3. Сигнализирование на рынке труда	246
4.2.4. Дополнительные ограничения на равновесия в сигнальных играх	251
4.2.5. Игры с сообщениями	257
4.3. Примеры.	259
4.3.1. Раскрытие информации в играх с сообщениями	259

4.3.2. Экономическая теория политического популизма	263
4.3.3. Репутация и кредитно-денежная политика центрального банка	267
4.3.4. Блеф в покере	271
4.3.5. Риск оппортунистического поведения.	274
Приложение	281
Доказательство теоремы 4.1 о существовании совершенного равновесия	281
4.4. Задачи	284
Список литературы к главе 4.	291
Русско-английский словарь терминов	293
Предметный указатель	297

ПРЕДИСЛОВИЕ НАУЧНОГО РЕДАКТОРА

В настоящее время имеется множество книг по теории игр на русском языке, однако необходимость в написании, как минимум, еще одной такой книги у меня не вызывает сомнений.

Причина здесь кроется в том факте, что термин «теория игр» существенным образом многозначный. Во-первых, существует теория игр в рамках общей теории исследования операций (игры с нулевой суммой, потенциальные игры и методы численного решения). Во-вторых, есть теория игр с точки зрения чистой математики (теоремы о неподвижных точках, параметрические задачи на максимум, поведение многозначных отображений, многоцелевое динамическое программирование). В-третьих, можно говорить о теории игр с точки зрения математической логики («детские» игры с последовательными ходами, в которых нужно отыскать оптимальную стратегию одного из двух игроков, теорема Цермело и метод обратной индукции, алгоритмическая сложность поиска равновесий Нэша). В-четвертых, можно говорить о теории игр с точки зрения экономики и политической науки (гербарий сюжетов, так или иначе концентрирующийся вокруг трагедии общин и иных примеров неэффективности равновесий по Нэшу). Все перечисленные «теории игр» — это совершенно разные науки! И по методам, и по характеру формулируемых задач, и по тому математическому аппарату, который является в каждой из них центральным.

Предлагаемая читателю «Теория игр в общественных науках» посвящена решению не очень простой задачи. А именно, разъяснить не-математикам основы теории игр *на строго научном языке*. Такая попытка является достаточно рискованной. В то же время, учитывая то, что данная книга —

- (А) *почти единственный* текст на русском языке, где подробно обсуждаются аукционы, задача дизайна механизмов, а также сигнальные игры и равновесия в них, в рамках общей теории динамических игр с неполной информацией¹;
- (Б) возможно, не единственная, но исключительно удачная попытка разъяснить базовые для современного экономиста вещи на строгом уровне (равновесия в играх голосования и политические равновесия, решение по доминированию в модели олигополии Курно, а также целый ряд других классических сюжетов, входящих в необходимый минимум любого работающего экономиста);

¹ Часть этого материала разбирается в книгах Печерского и Беляевой [2001], Писарука [2013], Васина и Морозовой [2003], Данилова [2002] и в некоторых других книгах.

(В) в числе прочего, «малая энциклопедия», или «джентльменский набор» сюжетов, которыми оперирует любой грамотный экономист-теоретик, я полагаю, что риск, предпринятый автором, оправдан.

Научное редактирование не коснулось части разобранных в книге примеров, однако все они в свое время были проработаны во время семинарских и лекционных занятий в Высшей школе экономики. И автор, и научный редактор с благодарностью учтут все присланные замечанные вами опечатки и неточности при последующем переиздании книги после первой «пробы читателем».

Алексей Савватеев,
доктор физико-математических наук

Васин А.А., Морозов В.В. Введение в теорию игр с приложениями в экономике. Учеб. пособ. М.: 2003.

Данилов В. Лекции по теории игр. М.: New Economic School, 2002.

Печерский Л., Беляева А.А. Теория игр для экономистов: Вводный курс. Учеб. пособ. СПб.: Изд-во Европ. ун-та в С.-Петербурге, 2001.

Писарук Н.Н. Введение в теорию игр. 2013. <<http://pisaruk.narod.ru/books/games.pdf>>.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Люди, организации и государства все время взаимодействуют друг с другом. Как поступит каждый, когда его выигрыш зависит не только от его собственного выбора, но и от чьего-то другого? Теория игр — это раздел прикладной математики, позволяющий осмыслить принимаемые в подобных ситуациях решения. Теория игр широко используется в экономике, а также в политологии, социологии и науке об управлении.

Эта книга написана на основе курсов, читаемых автором на факультетах экономики и прикладной математики Высшей школы экономики в Москве на протяжении последних четырех лет. Книга адресована студентам бакалавриатов и магистратур высших учебных заведений, изучающих экономику, политологию, менеджмент, прикладную математику. Предполагается, что читатель владеет основами математического анализа (дифференциальное и интегральное исчисление), а также основами теории вероятностей. Книга также может представлять интерес для студентов магистратуры (особенно, не изучавших предмет ранее) и любого читателя, желающего подготовить себя к чтению международной академической литературы в области экономики или политологии.

При составлении книги автор преследовал три непростые и отчасти противоречивые задачи.

Во-первых, книга должна содержать достаточно большой, но не чрезмерный, объем формальных математических определений, теорем и доказательств, составляющих костяк теории. С одной стороны, книга задумывалась как учебник, предназначенный для студентов бакалавриатов экономических вузов, что предполагало наличие у читателя знания математического анализа, по крайней мере, на начальном уровне. С другой стороны, целью книги не являлся обзор (пусть даже поверхностный) всего инструментария, разработанного по сей день, или формулирование утверждений как можно в более общей форме. Таким образом, необходимо было достичь компромисса между доступностью и общностью (и в значительно меньшей мере — между доступностью и точностью) формулировок и объемом.

Во-вторых, книга должна быть «живой», т.е. содержать большое число примеров применения теории в таких общественных науках, как экономика или политология, чтобы поддерживать интерес читателя и не допускать ощущения, что теория оторвана от реальности и от предметной области читателя. Книга должна быть способна заинтересовать незнакомого с предметом читателя.

В-третьих, как подбор математических утверждений, так и подбор примеров и задач должны быть современными и актуальными. Наука быстро меняется. Те ветви теории, которые казались перспективными (и даже

необходимыми) двадцать–тридцать лет назад, сегодня представляют лишь исторический интерес — т.е. не используются в экономической, политологической или иной науке. В то же время появились новые направления. Поэтому одним из критериев отбора задач для книги являлся индекс цитирования работ, откуда они были взяты.

Структура книги следует более-менее установившемуся стандарту для учебников среднего и продвинутого уровней по данному предмету. Учебник разделен на четыре главы.

Первая глава посвящена статическим играм с полной информацией. Приводится определение игры в нормальной форме, определения доминирования, смешанных стратегий и равновесия Нэша. В качестве приложения приводится доказательство теоремы Нэша о существовании равновесия.

Во второй главе рассматриваются динамические игры с полной информацией. Помимо совершенства по подыграм для конечных игр, в главе говорится о конечно и бесконечно повторяющихся играх. Также дается определение совершенного марковского равновесия в повторяющихся играх (это — очень востребованная в наше время аналитическая концепция) и разбираются несколько задач, использующих такую игровую постановку.

Третья глава имеет два раздела. Во-первых, это байесовы игры, или статические игры с неполной информацией. Во-вторых, в главе излагаются основы теории дизайна механизмов и теории аукционов. В частности, формулируется и доказывается теорема об эквивалентности доходов в аукционах, даются определения и условия Нэш-реализуемости и реализуемости в доминирующих стратегиях.

Наконец, четвертая глава посвящена динамическим играм с неполной информацией. Большое внимание уделяется изложению различных концепций решения для таких игр (секвенциального равновесия, совершенного равновесия) и их взаимосвязи, сигнальным играм, играм с сообщениями.

В книге разбираются или предлагаются для самостоятельного решения около 200 примеров и задач, в том числе и стандартные примеры из области экономики — производство общественных благ, объемная и ценовая конкуренция, аукционы, некоторые макроэкономические модели. Значительная часть примеров приходится и на политологические темы, такие как поведение политиков и избирателей на выборах, лоббирование, моделирование решений в авторитарных политических системах, возникновение массовых протестов.

Для вводного курса в теорию игр объемом в один семестр в качестве основного текста можно использовать первые две главы данной книги, а также (в зависимости от скорости освоения материала) начало третьей главы. Вся книга может быть использована в качестве учебника в рамках двухсеместровых курсов, рассчитанных на студентов 3–4 года обучения. Книга также может быть использована в качестве вспомогательного ма-

териала для продвинутого курса по политологии или политической экономике.

Автор выражает глубокую признательность и благодарность К.С. Сорокину, помогавшему мне вести курсы в Высшей школе экономики (ему же принадлежит доказательство теоремы 4.1); А.В. Савватееву, проведшему большую работу по научному редактированию текста; Д.С. Карабекяну, редактировавшему текст задачи; Ф.Т. Алескерову, С.Б. Измалкову, а также всем студентам, с которыми я работал и которые помогали мне находить ошибки в этом тексте.

1

ГЛАВА

СТАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ

Ранним утром 14 октября 1066 г. войска короля Гарольда, правителя Англосаксонского королевства, стояли на высоком холме рядом с местечком под названием Гастингс и готовились к бою. Двумя неделями ранее Вильгельм, герцог Нормандский, вторгся на земли Гарольда, желая присвоить их себе и щедро наградить ими своих подданных. И вот настал день большого сражения.

Войско нормандцев, в основном состоявшее из тяжело вооруженных всадников, обрушилось на пеших англосаксов, стоявших щитом к щиту на вершине холма. Первая атака была отбита: потеряв много убитых и раненых, нормандцы отступили, чтобы напасть снова.

Раз за разом они атаковали. Наконец, когда уже почти стемнело, всадникам все-таки удалось пробить брешь в обороне англичан. Войско Гарольда вдруг дрогнуло и побежало. Король был убит; немногим удалось спастись. Англия была завоевана — в последний раз в своей долгой истории.

Почему исход сражения решился так быстро? Каждый воин, стоя в строю, преследовал две (иногда противоположные) цели: выполнить свой воинский долг и остаться в живых. Пока его товарищи держали строй, воин должен был сражаться: конечно же, он мог быть убит при следующей атаке, но если бы он покинул поле боя, то его ждал бы позор и, возможно, наказание или даже смерть за трусость. Но вот последовала особо суровая атака. Видя, как кругом гибнут их товарищи, несколько солдат дрогнуло и побежало. Несколько стоящих рядом последовало их примеру.

Как только некоторое критическое число солдат покинуло поле боя, держать оборону перестало быть выгодным: риск быть убитым начал перевешивать возможное наказание за бегство. Тем более, что чем больше солдат покидало поле боя, тем меньше становилась вероятность того, что каждый отдельно взятый беглец будет наказан. Не прошло и нескольких минут, как все войско обратилось в бегство и погибло: пеший не имеет никаких шансов против преследующего его конного воина. Тем не менее решение каждого

солдата бросить свой щит и попытаться добежать до видневшейся вдали лесной опушки было рациональным: если остальные бегут, то у отдельно взятого воина фактически нет выбора. Оставаясь сражаться, он обрекает себя на верную смерть. Пытаясь спастись, он с некоторой вероятностью остается в живых. Что произошло бы, если бы каждый воин был готов сражаться до конца, как личная дружина короля Гарольда (которая не отступила ни на шаг и была полностью уничтожена)? Возможно, никто бы не побежал и битва закончилась бы победой англосаксонцев. Но история не знает сослагательного наклонения.

Оглянитесь вокруг. Действия других людей практически всегда влияют на решения, которые нам приходится принимать. Почему в некоторых вузах студенты списывают на экзамене? Если списывают все остальные, то для каждого отдельно взятого студента выгода от списывания перевешивает ожидаемое наказание от поимки. В приличных вузах не списывает никто (или почти никто): попавшегося ждет показательное наказание, вплоть до отчисления. Как происходит обвал финансового рынка? По той же причине: если вы ожидаете, что цена акции упадет, то вам выгодно от нее избавиться. Если все начинают избавляться от этой акции, то ее цена падает, оправдывая ожидания. Конечно же, всегда можно рассуждать о «стадном инстинкте» и о стремлении людей имитировать друг друга, но очень часто массовая паника имеет рациональное (на индивидуальном уровне) объяснение.

Теория игр — раздел прикладной математики, с помощью которого ученые (в первую очередь экономисты и политологи) моделируют поведение нескольких субъектов, когда критерий принятия решения каждого зависит от решений, принимаемых остальными. Важнейший факт состоит в том, что решение игровой задачи часто отличается от решения оптимизационной задачи: войску короля Гарольда (да и самому королю) было бы «выгодно», если бы никто из солдат не побежал. Но в итоге решение каждый отдельный солдат принимал сам за себя.

1.1. СТАТИЧЕСКИЕ ИГРЫ С ПОЛНОЙ ИНФОРМАЦИЕЙ: ЧИСТЫЕ СТРАТЕГИИ

Существует несколько способов классифицировать игровые задачи. Различие между *статическими* и *динамическими* играми обусловлено возможностью игроков наблюдать за действиями друг друга и реагировать на них. В статических играх игроки принимают решения одновременно; принятые решения не подлежат пересмотру. В динамических играх существует более сложный порядок ходов.

1.1.1. ИГРЫ В НОРМАЛЬНОЙ ФОРМЕ

В детстве все играли в игру «камень-ножницы-бумага». Каждый из двух игроков выбрасывает одну из трех заглавных фигур. «Камень» побеждает «ножницы», «бумага» — «камень», «ножницы» — «бумагу». Победивший бьет щелбан проигравшему. Как можно математически описать эту игру?

Во-первых, нам известно, что игроков всего двое. Будем говорить, что *множество игроков* в этой игре состоит из двух элементов: $I = \{1, 2\}$.

Во-вторых, мы знаем, что каждый игрок может выбрать одну из трех стратегий. Таким образом, для каждого игрока $i \in I$ *множество стратегий* будет $S_i = \{\text{«камень»}, \text{«ножницы»}, \text{«бумага»}\}$.

В-третьих, мы знаем, как выигрыши игроков зависят от тех стратегий, которые они выбрали. В нашей игре всего два игрока, причем у каждого игрока конечное число стратегий. Выигрыши игроков в такой игре можно представить в виде матрицы, каждая строка которой соответствует одной стратегии 1-го игрока, каждый столбец — одной стратегии 2-го игрока. Каждая ячейка такой матрицы будет соответствовать одной из возможных ситуаций развития событий. Она будет содержать два числа: выигрыш 1-го игрока и выигрыш 2-го игрока. Если выигрыш от победы равен 1, выигрыш от поражения равен -1 , а выигрыш от ничьей равен 0, то матрица выигрышей будет выглядеть так:

		Игрок 2		
		«камень»	«ножницы»	«бумага»
Игрок 1	«камень»	0; 0	1; -1	-1 ; 1
	«ножницы»	-1 ; 1	0; 0	1; -1
	«бумага»	1; -1	-1 ; 1	0; 0

Эта матрица задает нам *функции выигрышей* игроков — т.е. то, как их выигрыши зависят от играемых стратегий.

Для того чтобы формально определить, что такое функция выигрышей (ее иногда также называют *функцией полезности*), введем следующее обозначение.

¹ «Камень-ножницы-бумага» — статическая игра: решая, какой ход делать, вы не знаете, что выбросит ваш противник. После того, как вы сделали свой ход, у вас нет возможности передумать, причем ваш противник находится в том же положении, что и вы. Примерами динамических игр являются карточная игра в «дурака», «крестики-нолики» или шахматы. Стратегия должна предписывать, какой ход надо делать в каждой из возможных игровых ситуаций. Стратегия, в таком случае, — это толстая книга, прочтя которую, доверенное вами лицо может играть в карты или шахматы так, как вы считаете нужным. Множество стратегий в такой игре — это все возможные способы написания таких книг. Более подробно о том, как решать такие игры, мы расскажем в следующей главе.

Определение 1.1. Пусть S_1, \dots, S_N — множества. Декартовым произведением этих множеств называется множество

$$S \equiv \prod_{i=1}^N S_i = \{(s_1, \dots, s_N) \mid s_1 \in S_1, \dots, s_N \in S_N\}.$$

Если $I = \{1, \dots, N\}$ — множество игроков, S_1, \dots, S_N — множества стратегий игроков, то будем говорить, что *множество профилей стратегий*, или *множество стратегий в игре*, есть $S = \prod_{i=1}^N S_i$. Например, в нашей игре множество профилей стратегий будет $S = \{(\text{«камень»}, \text{«камень»}), (\text{«камень»}, \text{«ножницы»}), \dots, (\text{«бумага»}, \text{«бумага»})\}$.

Любой элемент $s_i \in S_i$ называется *стратегией* игрока i , любой элемент $s \in S$ — *профилем стратегий* игроков. Обозначим через $S_{-i} = \prod_{j \neq i} S_j$ множество всех возможных профилей стратегий для всех игроков, кроме игрока i . Соответственно, $s_{-i} \in S_{-i}$ будет профилем стратегий всех игроков, кроме i .

Функция выигрыша игрока i будет присваивать каждому профилю стратегий $s \in S$ некоторый выигрыш $u_i: S \rightarrow \mathbb{R}$. Назовем функцию $u: S \rightarrow \mathbb{R}^N = (u_1, \dots, u_N)$ *профилем функций выигрышей* игроков.

Теперь можно формально определить, что мы имеем в виду под игрой.

Определение 1.2. Набор $G = \langle I, S, u \rangle$ называется *игрой в нормальной форме*.

В игре каждый игрок i выбирает одну стратегию из множества стратегий S_i . Выигрыш каждого игрока зависит как от выбранной им стратегии, так и от стратегий, выбранных другими игроками. Цель анализа игры — понять, какие стратегии игроки выберут в зависимости от множества профилей стратегий S и профиля функций выигрышей u .

1.1.2. ДОМИНИРОВАНИЕ

Наша задача — составить прогноз поведения игроков в игре. Первое (и наиболее очевидное) рассуждение состоит в том, что ни один игрок не станет играть некоторую стратегию, если какая-то другая стратегия всегда приносит ему больший выигрыш.

Определение 1.3. Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — игра в нормальной форме. Тогда для игрока i стратегия $s_i \in S_i$ *сильно доминирует* стратегию $s'_i \in S_i$, если для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ выполнено

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s'_i, s_{-i}). \quad (1.1)$$

Стратегия $s_i \in S_i$ *слабо доминирует* стратегию $s'_i \in S_i$, если для всех $s_{-i} \in S_{-i}$ выполнено

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s'_i, s_{-i}), \quad (1.2)$$

а хотя бы для одного $s_{-i} \in S_{-i}$ мы дополнительно имеем (1.1).

Если одна стратегия всегда приносит игроку больший выигрыш, чем другая, то мы говорим о сильном доминировании. Если у игрока есть одна стратегия, которая сильно или слабо доминирует все остальные, то мы можем ожидать, с большой долей уверенности, что он сыграет именно ее. Если такая стратегия есть у каждого игрока, то мы получили решение игры — прогноз относительно того, что сделает каждый игрок.

Определение 1.4. Набор стратегий $s^* \in S$ является *равновесием в сильно (слабо) доминирующих стратегиях*, если для всех i и всех $s'_i \in S_i$, $s'_i \neq s^*_i$, стратегия s^*_i сильно (слабо) доминирует s'_i .

Будем говорить, что стратегия является *доминируемой*, если ее доминирует какая-то другая стратегия.

Дилемма заключенного. Два бандита — Петя и Вася — попались милиции. Их подозревают в совершении ограбления. Следователь предлагает каждому из них дать показания против своего товарища. Никаких улик против них нет: если никто из них не сознается, то каждый проведет в тюрьме всего один год за незаконное хранение оружия. Петя и Вася сидят в разных камерах и лишены возможности общаться друг с другом. Если один из них даст показания, а другой промолчит, то промолчавший проведет в тюрьме десять лет, а расколовшийся выйдет на свободу. Если оба расколятся, то каждый получит по восемь лет. Формально, мы имеем $I = \{\text{Петя, Вася}\}$, $S_1 = S_2 = \{\text{«сознаться», «молчать»}\}$. Пусть выигрыш каждого равен, со знаком минус, годам, проведенным за решеткой:

		Вася	
		«молчать»	«сознаться»
Петя	«молчать»	−1; −1	−10; 0
	«сознаться»	0; −10	−8; −8

Как же поведут себя Петя и Вася? Каждому выгодно сознаться, вне зависимости от того, что сделает другой. Допустим, что Васе стало известно, что Петя промолчит. Если Вася сознается, он проведет в тюрьме 0 лет; если промолчит, то один год. Следовательно, если Петя будет молчать, то Вася расколется. Теперь предположим, что Вася знает, что Петя решил расколоться. Васе все равно выгодно сознаться (так он получит 8 лет вместо 10). Следовательно, вне зависимости от того, что сделает Петя, Вася сознается. Поскольку выигрыши симметричны, Петя тоже сознается: профиль стратегий («сознаться», «сознаться») является равновесием в сильно доминирующих стратегиях.

Эффективность по Парето. Заметим, что исход «дилеммы заключенного» (8 лет тюрьмы каждому) не является наилучшим: если бы Петя и Вася сыграли стратегии $s = (\text{«молчать», «молчать»})$, то каждому из них было бы строго лучше. Это — следствие того, что мы анализируем игровую, а не

оптимизационную задачу. Петя и Вася принимают решения по отдельности; если бы за них обоих решал кто-то один, максимизирующий суммарный выигрыш Пети и Васи, то он бы действительно выбрал $s =$ («молчать», «молчать»). Однако в реальности каждый решает сам за себя.

Можем ли мы сказать, какой из двух профилей стратегии является более хорошим? Наиболее строгий критерий имеет следующее формальное определение.

Определение 1.5. Пусть $G = \langle I, S, u \rangle$ — игра, стратегии $s, s' \in S$. Будем говорить, что профиль стратегий s *Парето-доминирует* s' , если для всех $i \in I$

$$u_i(s) \geq u_i(s'), \quad (1.3)$$

причем как минимум для одного i это неравенство выполняется строго.

Профиль стратегий s^o является *Парето-эффективным* или *оптимальным по Парето*, если не существует стратегии $s' \in S$, которая Парето-доминирует стратегию s^o .

Следуя этому определению, мы будем считать, что первый профиль стратегий лучше второго, если все без исключения игроки согласны с тем, что первый профиль стратегий не хуже, причем по крайней мере один игрок считает, что первый профиль стратегий лучше. В игре «дилемма заключенного» единственный профиль стратегий, который не является Парето-эффективным — это равновесные стратегии («сознаться», «сознаться»). В этом отражена суровая правда жизни. Поведение игроков в самых разных ситуациях очень часто оставляет желать лучшего. Случается так, что существует вариант действий, который увеличил бы благосостояние всех без исключения игроков — но он не обязан являться равновесием. В итоге может показаться, что в плачевном для всех игроков исходе виновата какая-то невидимая сила, какой-то дополнительный игрок, о существовании которого мы можем только догадываться. Однако теория игр способна объяснить такие исходы, не прибегая к конспирологии. Парето-доминируемые равновесные исходы случаются, как бы это ни было печально.

Аукцион второй цены. Предположим, что на продажу выставлена ранее не известная картина великого художника Виктора Михайловича Васнецова. Два богатых человека — Владимир и Михаил — решили купить эту картину. Владимир оценивает картину в v_1 руб., Михаил — в v_2 руб. (т.е. по определению, v_1 и v_2 — максимальная сумма, которую каждый из них готов заплатить за картину). Аукцион происходит по следующей схеме. Сначала Владимир и Михаил присылают свои заявки в закрытых пакетах. Картину приобретает тот, кто предложит бóльшую сумму денег, но платит он столько, сколько указано в проигравшей заявке. Для простоты предположим, что при совпадении заявок каждый покупатель выигрывает с вероятностью $1/2$. Таким образом, если s_1 — это заявка Владимира,

а s_2 — заявка Михаила, то функция выигрышей Владимира выглядит следующим образом:

$$u_1(s_1, s_2) = \begin{cases} v_1 - s_2, & s_1 > s_2; \\ \frac{v_1 - s_1}{2}, & s_1 = s_2; \\ 0, & s_1 < s_2. \end{cases} \quad (1.4)$$

Докажем, что стратегия $s_1^* = v_1$ слабо доминирует все остальные. Нам надо перебрать все остальные стратегии $s_1' \in [0, \infty)$ и показать, что ни для одной $s_2 \in [0, \infty)$ мы не можем иметь $u_1(s_1', s_2) > u_1(s_1^*, s_2)$. Мы имеем

$$u_1(v_1, s_2) - u_1(s_1', s_2) = \begin{cases} 0, & s_1' > s_2; \\ \frac{v_1 - s_2}{2}, & s_1' = s_2; \\ v_1 - s_2, & s_1' < s_2, \end{cases} \quad (1.5)$$

при $s_2 \leq v_1$ и

$$u_1(v_1, s_2) - u_1(s_1', s_2) = \begin{cases} s_2 - v_1, & s_1' > s_2; \\ \frac{s_2 - v_1}{2}, & s_1' = s_2; \\ 0, & s_1' < s_2, \end{cases} \quad (1.6)$$

при $s_2 > v_1$. Обе эти величины неотрицательны. Следовательно, в аукционе второй цены слабо доминирующая стратегия состоит в том, чтобы назвать в качестве заявки свою истинную оценку.

Выборы — два кандидата. Пусть N (нечетное число) членов гражданского кооператива решают, за какую из двух кандидатур на должность председателя следует проголосовать. Председателем становится тот, кто получит больше половины голосов. Таким образом, $S_i = \{A, B\}$ для всех i , где «А» означает отдать голос за кандидата А, «В» — за кандидата В. Пусть избиратель i получает выигрыш 1, если председателем становится первый кандидат, и 0, если председателем становится второй кандидат. Тогда стратегия $s_1 = A$ слабо доминирует стратегию $s_1' = B$. Действительно, пусть D_A — число голосов (кроме избирателя i), поданных за кандидата А (остальные $N - 1 - D_A$ голосов отдаются за кандидата В). Пусть $u_i(s_i, D_A)$ — выигрыш избирателя i при голосовании за кандидата $s_i \in S_i$. Тогда мы получим

$$u_i(A, D_A) - u_i(B, D_A) = \begin{cases} 1, & D_A = \frac{N-1}{2}; \\ 0, & D_A \neq \frac{N-1}{2}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Иными словами, голос избирателя имеет значение, только если остальные голоса разделились ровно пополам. В таком случае его голос будет ре-

шающим; если же за одного из кандидатов собираются голосовать более половины оставшихся избирателей, то голос избирателя не влияет на исход выборов (и, соответственно, его выигрыши при голосовании за кандидата А и кандидата В равны). Профиль стратегий «каждый голосует за своего любимого кандидата» является, таким образом, равновесием в слабо доминирующих стратегиях. При двух кандидатах *честное* поведение (когда каждый голосует за того, кто ему больше нравится) является рациональным, т.е. даже если избиратель знал бы, как проголосуют другие, он все равно проголосовал бы так же.

1.1.3. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЕ УДАЛЕНИЕ ДОМИНИРУЕМЫХ СТРАТЕГИЙ

Если равновесие в сильно доминирующих стратегиях существует, то оно является весьма обоснованным прогнозом действий игроков. К сожалению, равновесие в сильно доминирующих стратегиях встречается далеко не во всех играх. Рассмотрим такую игру:

		Игрок 2			
			U	C	R
Игрок 1	U	1; 2	2; 1	1; 0	
	L	0; 5	1; 2	7; 4	
	D	-1; 1	3; 0	5; 2	

В этой игре у игрока 1 нет доминирующих (и доминируемых) стратегий. Однако у игрока 2 стратегия U доминирует C. Следовательно, если игрок 2 рационален, то он не будет играть доминируемую стратегию C. Если игрок 1 знает, что игрок 2 рационален, то он может вообще не учитывать существование стратегии C у игрока 2. Следовательно, он может рассматривать следующую игру:

		Игрок 2		
			U	R
Игрок 1	U	1; 2	1; 0	
	L	0; 5	7; 4	
	D	-1; 1	5; 2	

Если игрок 1 (а) рационален и (б) знает о том, что игрок 2 рационален, то он не будет играть доминируемую стратегию D. С точки зрения игрока 2 (если он рационален, верит в рациональность игрока 1, а также в то, что игрок 1 верит в рациональность игрока 2), матрица игры тогда выглядит так:

		Игрок 2		
			U	R
Игрок 1	U	1; 2	1; 0	
	L	0; 5	7; 4	