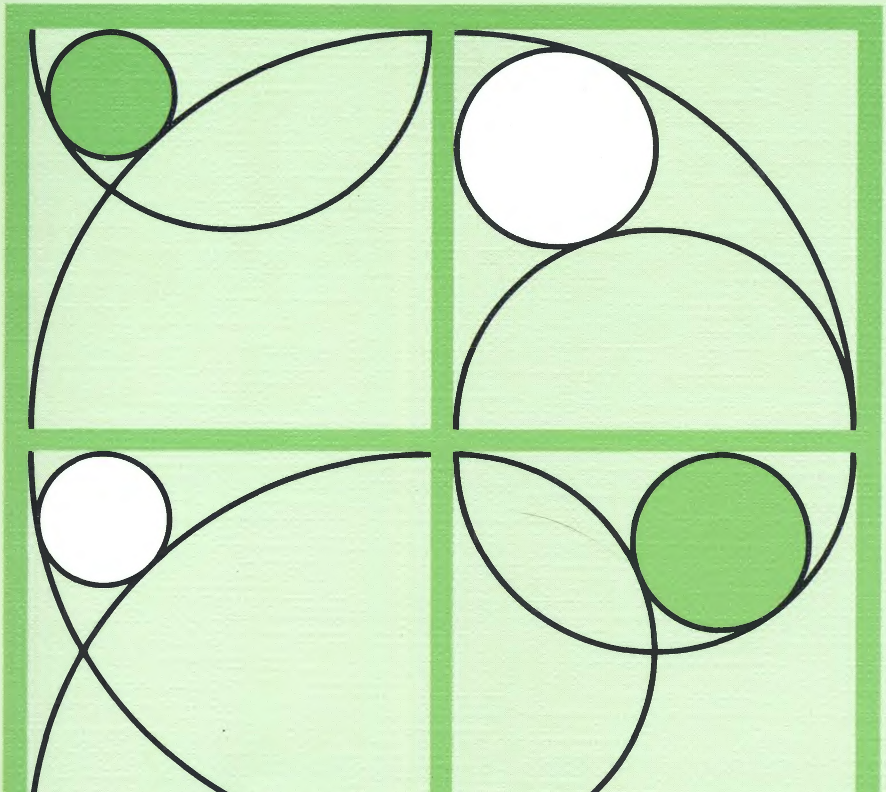
М. А. Волчкевич

Уроки геометрии в задачах

7–8 классы



М. А. Волчкевич. Уроки геометрии в задачах. 7–8 классы

М. А. Волчкевич

Уроки геометрии в задачах
7—8 классы

Москва
Издательство МЦНМО
2016

УДК 514.112
ББК 22.151.0
В68

Волчкевич М. А.

В68 Уроки геометрии в задачах. 7—8 классы. — М.: МЦНМО, 2016. — 200 с.

ISBN 978-5-4439-1016-1, 978-5-4439-1015-4 (общ.)

Книга обобщает авторский опыт преподавания геометрии в нескольких московских школах. В ней много рисунков — это сильно экономит время на уроках. Перед каждым параграфом дается справочный материал — формулировки основных теорем и определения.

Материал каждой темы строится по классическому принципу: от простого к сложному. Первые задачи доступны каждому школьнику, последние достигают уровня серьезных математических олимпиад. Около половины всех задач авторские. Подборка к каждой теме выстроена так, чтобы показать содержащийся в ней метод со всех сторон. Данная книга составлена именно для работы на уроках, поэтому решений в ней нет, только ответы.

Книга предназначена для школьников, преподавателей математики, студентов педагогических вузов и университетов.

ББК 22.151.0

ISBN 978-5-4439-1016-1
ISBN 978-5-4439-1015-4 (общ.)

Оглавление

Предисловие

Зачем в школе нужна геометрия, что она дает детям? Спросите прилежную ученицу: «Чем вы занимаетесь на уроках геометрии?» Она вам ответит: «Мы доказываем». Ответ этот, при всей его наивности, бьет в самую точку — именно на уроках геометрии впервые возникает в школе необходимость доказательства теоремы, какой-либо истины, идея доказательства вообще. Но геометрия учит не только этому. Она учит вычислять, строить фигуры, давать определения. Отличать свойства и признаки, делать красивые чертежи и главное — дополнительные построения. Проведи несколько линий — и трудная задача вдруг станет легкой, очевидной. Древние греки в таких случаях просто говорили: «Смотри!» Недаром греческие слова *теория* и *театр* восходят к общему корню.

Нигде кроме геометрии нет такого разнообразия красивых фактов и задач, для получения которых нужно лишь немного теории. Это похоже на игру в шахматы — знание основных теорем здесь подобно лишь умению делать ходы фигурами, то есть правилам игры. Любая содержательная задача — это уже комбинация, сопоставление фактов, в ней всегда нужно сделать несколько ходов.

Видя это разнообразие, родители учеников часто задают мне один вопрос: «Нельзя ли почитать какой-нибудь учебник, решить из него несколько хороших и правильных задач и научиться всему этому побыстрее?» Слыша такое, я всегда улыбаюсь: ровно тот же вопрос задавал две тысячи лет назад египетский царь Птолемей великому Евклиду. Ответ Евклида давно уже стал афоризмом: «В геометрии нет царского пути!» Я готов подтвердить, что не существует списка из ста таких задач. Над списком из тысячи я бы уже подумал. Единственное, что тут можно сделать, — это устроить так, чтобы ребята решали много хороших задач и делали это с удовольствием для себя. Наверное, так же учат иностранные языки, учатся музыке, да и любому содержательному умению.

* * *

Как устроена эта книга? По сути, она обобщает мой опыт преподавания геометрии в математических классах нескольких московских школ за последние 15 лет. В ней много рисунков — и это не случайно. Картинка всегда воспринимается человеком на порядок быстрее, чем любой текст, по рисунку учитель в книге сразу найдет нужную ему задачу, а ученик быстро поймет, в чем она состоит. Рисунки экономят время на уроках, а его всегда не хватает! Перед каждым параграфом дается справочный материал — не только формулировки основных теорем, но и определения. Определения обычно трудно запоминаются школьниками, и не помешает всегда иметь их под рукой. Материал каждой темы строится по классическому принципу: от простого к сложному. Первые задачи доступны каждому школьнику, последние достигают уровня серьезных математических олимпиад. Главные задачи либо выделяются в тексте названиями, либо их номера подчеркиваются. Самые трудные задачи отмечены звездочкой. К задачам на вычисление даются ответы и указания. Данная книга составлялась мной именно для работы на уроках, и очень хорошо, если она будет на столе у каждого ученика. Поэтому в ней нет решений — только ответы. Иначе слишком велико было бы искушение у ребенка туда заглянуть! Подборка задач к каждой теме выстроена так, чтобы показать содержащийся в ней метод со всех сторон, так сказать, повернуть его разными гранями. По этой причине около половины всех задач книги оригинальны — они были специально мной придуманы как вариации основных идей для отработки ребятами необходимых навыков и умений.

* * *

Теперь несколько слов для учителей. Логика самого курса геометрии в данной книге такова, что признаки равенства прямоугольных треугольников, теорема о внешнем угле, о большей стороне и неравенство треугольника здесь доказываются без использования аксиомы параллельных, которая проходится уже во второй половине седьмого класса. То есть все эти утверждения относятся еще к абсолютной геометрии. Такой подход соответствует знаменитому старому учебнику А. П. Киселева или современному учебнику В. А. Смирнова. Аксиома параллельных, таким образом, стоит особняком — именно она отделяет геометрию Евклида от других геометрий. Пусть ребята хорошо запомнят этот ее краеугольный камень! В восьмом классе площадь проходится раньше теоремы Пифагора и подобия фигур. Мне это кажется оправданным, поскольку понятие площади очень естественно и легко воспринимается школьниками. К тому же древние греки делали именно так. Например, через площадь они легко доказывали лемму о пропорциональных отрезках или ту же теорему Пифагора. Данная книга представляет собой первую часть всего курса планиметрии, ориентированную на 7 и 8 классы. Следующая часть будет посвящена программе 9 класса и повторению планиметрии в 11 классе перед подготовкой к вступительным испытаниям.

Книга может быть эффективно использована на уроках геометрии в средней школе, особенно в классах с углубленным изучением математики. Она также подойдет для подготовки к олимпиадам, экзаменам и для самостоятельного обучения.

В заключение хочется выразить благодарность моему любимому учителю Р. К. Гордину, моим коллегам из лицея «Вторая Школа» И. Д. Жижилкину, П. В. Бибикову, А. И. Балабанову, Е. А. Дроздовой, К. В. Козеренко, И. А. Лепской, помогавшим мне советами при подготовке сборника к публикации, В. Радионову, сделавшему множество прекрасных рисунков и заметившему не меньше досадных опечаток при верстке макета, редактору О. Васильевой, тщательно выверившей тексты задач, а также Ю. Торхову, И. В. Ященко и всему издательству МЦНМО, подготовившему книгу к выходу в свет.

М. А. Волчкевич

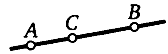
Аксиомы прямой

Аксиомы прямой

1. Для любой прямой на плоскости всегда можно взять точку, лежащую на ней, и точку, не лежащую на этой прямой.

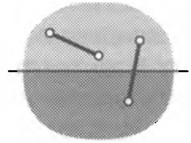
2. Через любые две точки на плоскости проходит только одна прямая.

3. Из любых трех точек на прямой только одна лежит между двумя другими.



точка *C* лежит между *A* и *B*

4. Прямая всегда разбивает плоскость на две части (полуплоскости)[1]. Если концы отрезка лежат в разных полуплоскостях, то он пересекает прямую; если же его концы принадлежат одной полуплоскости, то он ее не пересекает.



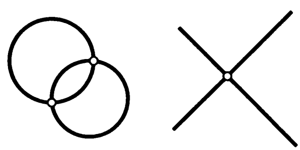
Отрезком называется множество всех точек на прямой, лежащих между двумя данными ее точками. Данные точки называются *концами отрезка*. Концы отрезка также принадлежат ему.

отрезок *AB*

Лучом называется множество всех точек на прямой, лежащих по одну сторону от данной ее точки[2]. Данная точка называется *началом луча*. Начало луча также принадлежит ему.

луч *AB*

1. Как видно из рисунка, две окружности могут пересекаться в двух точках. Докажите, что две различные прямые могут пересекаться только в одной точке.



К задаче 1

---

[1] Сама прямая не входит ни в одну из полуплоскостей.

[2] Правильнее было бы сказать, что точки луча находятся в одной полуплоскости относительно любой другой прямой, проходящей через его начало.

2. Через точку на плоскости провели прямую. Докажите, что через данную точку можно провести еще одну прямую, отличную от первой.

3. Сколько существует лучей с началом в данной точке *A*, проходящих через данную точку *B*?

4. На прямой отметили три точки. Сколько всего получилось лучей с началами в данных точках?

5. На плоскости отметили четыре точки. Через любые две из них провели прямую. Сколько всего при этом могло получиться прямых? (Разберите все случаи.)

6. Нарисуйте четыре прямые так, чтобы они пересекали друг друга ровно в пяти точках.

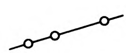
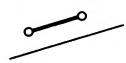
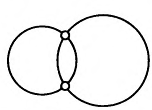
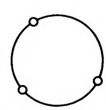
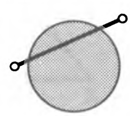
7. Могут ли семь прямых пересекаться ровно в девяти точках?

8. В каком наибольшем числе точек могут пересекаться 20 прямых?

9. В каком числе точек пересекают друг друга 15 прямых, никакие три из которых не пересекаются в одной точке, если среди них есть ровно две параллельные?

10. В каком числе точек пересекаются 10 прямых, если среди них нет параллельных и ровно три из них проходят через одну точку?

11. Незнайка утверждает, что окружность — это прямая. Почему он не прав? Приведите три возражения, ссылаясь на приведенную таблицу и аксиомы.

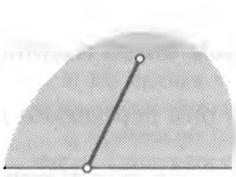
прямая			
окружность			

К задаче 11

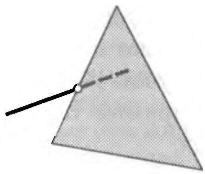
12. Отрезки *AB*, *BC* и *CE* пересекаются с данной прямой, а их концы не лежат на ней. Что можно сказать об отрезке *AE*?

13. Точка A лежит на прямой, отрезок BC пересекает прямую. Пусть M — произвольная точка на отрезке AB. Докажите, что отрезок CM пересечет прямую.

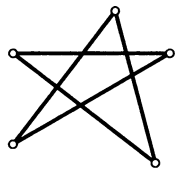
14. Фома утверждает, что точки на прямой принадлежат сразу двум полуплоскостям, границей которых является данная прямая. Какая аксиома тогда нарушается и почему?



К задаче 14



К задаче 15

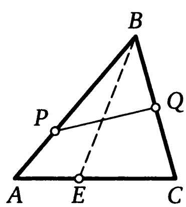


К задаче 16

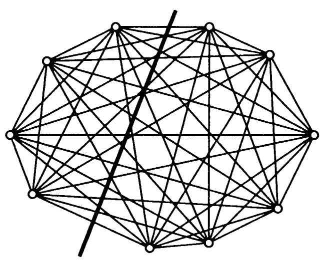
15. (Теорема.) Прямая пересекает одну сторону треугольника в точке, отличной от вершины. Докажите, что она пересечет еще одну его сторону.

16. Нарисуйте пятиугольную звезду. Проведите прямую, пересекающую все ее пять звеньев. Можно ли провести эту прямую так, чтобы она не проходила через вершины звезды? Ответ поясните.

17. На сторонах AB и BC треугольника ABC взяли точки P и Q, а на стороне AC — точку E. Докажите, что отрезок BE пересекает прямую PQ.



К задаче 17

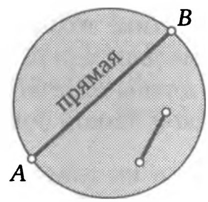


К задаче 18

18. Десять точек на плоскости попарно соединили отрезками. Прямая не проходит ни через одну из точек. Может ли она пересечь ровно 20 отрезков?

19. На плоскости отметили несколько точек и попарно соединили их все отрезками. Прямая не проходит ни через одну из точек. Оказалось, что она пересекла ровно 21 отрезок. Сколько отрезков не пересекла прямая? *Внимание: у задачи может быть несколько решений!*

20. Немецкий математик Клейн утверждал, что «плоскость» — это внутренность некоторого круга, а «прямые» на ней — отрезки с концами на окружности. Проверьте, что все пройденные нами аксиомы на такой «плоскости» выполняются. Как будет на ней выглядеть луч?



К задаче 20