Крис Уоринг

Математика на ладони

Руководство по приручению королевы наук

УДК 51
ББК 22.1
У64

Уорринг, Крис.

У64 Математика на ладони / Крис Уорринг ; [перевод с английского М.А. Райтмана]. — Москва : Эксмо, 2020. — 304 с. — (Краткая история).

ISBN 978-5-04-103031-5

Математику часто называют самым трудным, сложным предметом для изучения, многие признаются в страхе перед ней. В книге «Математика на ладони» Крис Уорринг доказывает, что математику легко понять и изучить, следуя определенной системе.

Каждая глава знакомит читателя с одной темой или теорией, демонстрируя, как овладеть ею с помощью проработанных проблем и примеров из жизни.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-04-103031-5

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Эту книгу я мог бы начать с утверждения, что математика окружает нас повсюду, и потом долго и нудно распространяться о том, как она важна. Это действительно так, и вы наверняка уже слышали об этом, но вряд ли это главная причина, по которой вы взяли в руки мою книгу.

Можно начать с того, что математические знания высоко ценятся на рынке труда, тем более учитывая доминирующую роль технологий в современном мире. Люди с техническим складом ума и вправду делают хорошую карьеру, но, честно говоря, эта книга не решит проблему вашего трудоустройства.

Я скажу одно, математике можно научиться. Многие испытывают перед ней ужас. Это словно болезнь — один заболевает и заражает остальных. Родители, друзья, учителя и многие другие заставляют нас поверить в то, что математика только для избранных, для тех, кому повезло родиться с активным правым полушарием мозга. Эта наука дается им без труда, заставляя остальных чувствовать себя идиотами.

Однако не спешите считать свой случай безнадежным.

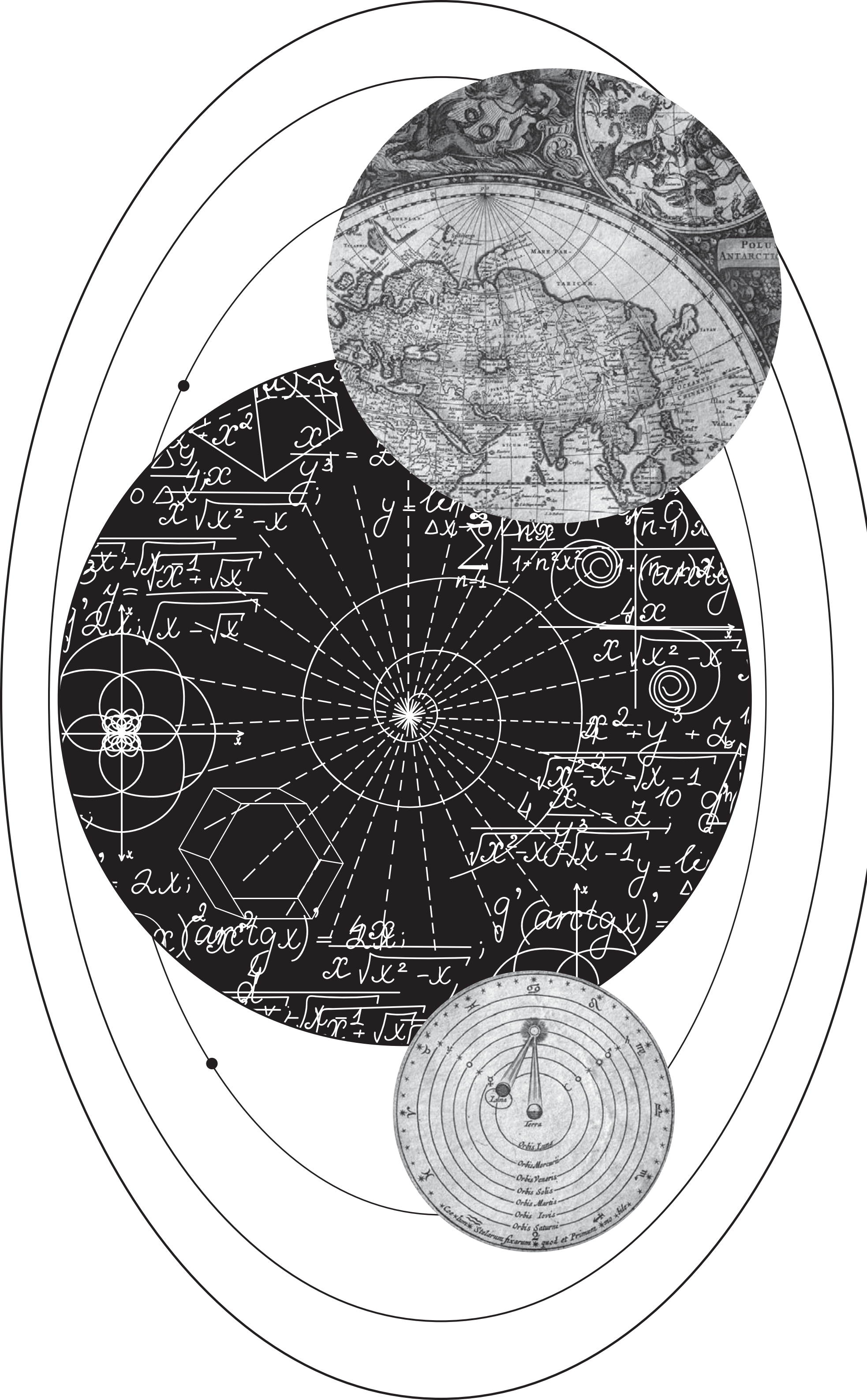
При желании освоить математику может каждый. Да, как и любой навык, это потребует времени и усилий. Да, одним она дается проще, чем другим, как и большинство наук. Я подозреваю, что у вас не так много времени, поэтому идея заключается в том, чтобы разбить важную информацию на легко усваиваемые фрагменты. Вы можете разбирать их по частям. Каждый последующий фрагмент базируется на предыдущем, так что вы легко можете взять на вооружение некоторые концепции, которые помогут вам понять мир вокруг.

Я разделил книгу на несколько частей. Многие моменты, о которых мы будем говорить, вы наверняка помните еще со школы, но моя цель — познакомить вас с действительно заслуживающими внимания аспектами, с которыми вам навряд ли довелось столкнуться.

Кроме того, чтобы разбавить повествование, я включил в книгу несколько забавных историй о том, как совершались знаменитые открытия и как из-за ошибок ситуация выходила из-под контроля.

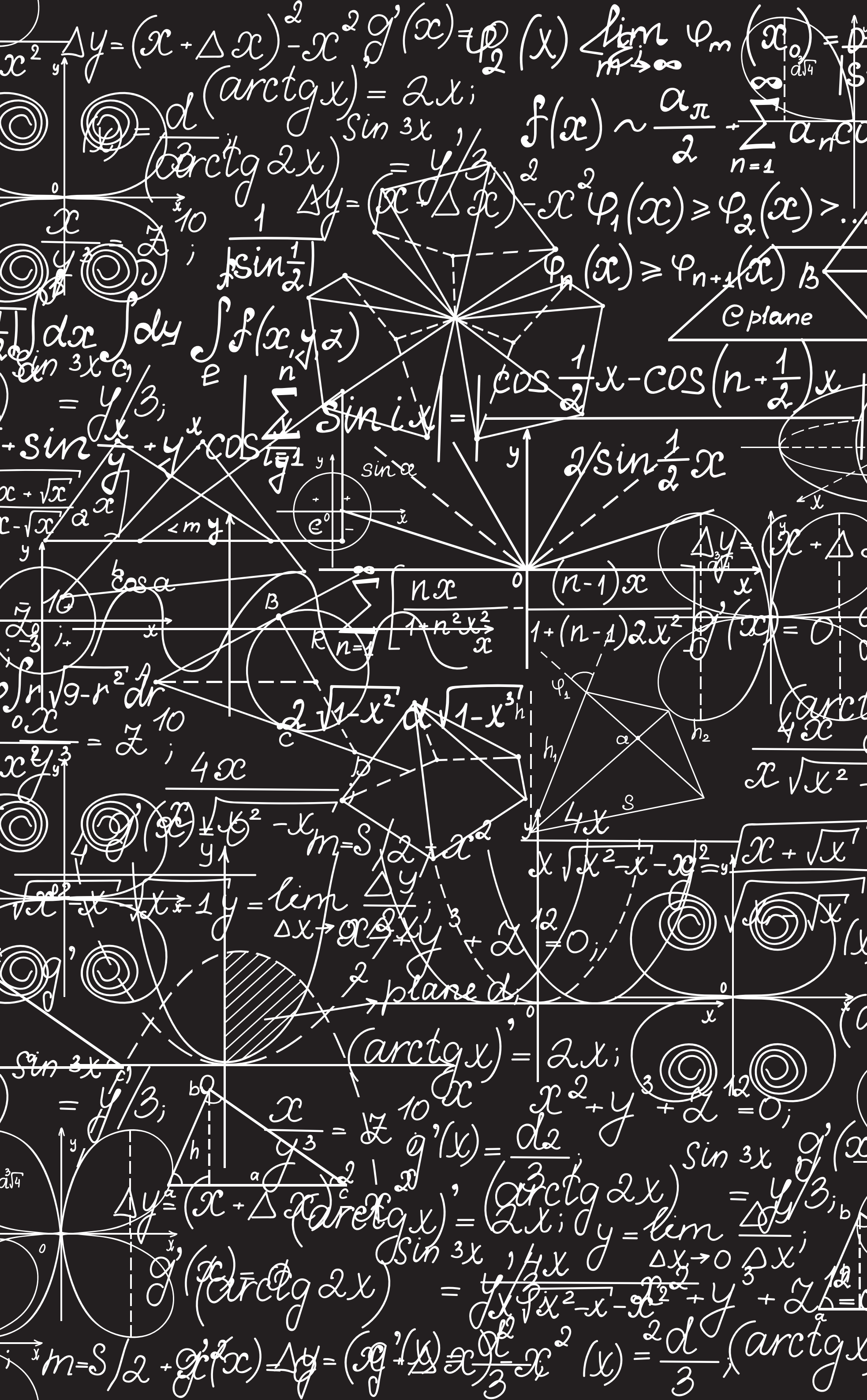
Эти занимательные случаи показывают, что математика — наука с богатой историей, а также ярко описывают то, как наши предки познавали мир. Вы увидите, что великим математикам приходилось упорно трудиться, чтобы совершить свои открытия.

Так что приготовьтесь к интеллектуальному пиршеству. Надеюсь, у вас проснулся аппетит!


Terra
Orbis Lunæ
Orbis Mercurii
Orbis Veneris
Orbis Solis
Orbis Martis
Orbis Iovis
Orbis Saturni

ЧАСТЬ I

ЧИСЛА



ГЛАВА 1

ТИПЫ ЧИСЕЛ

У 68% населения Земли есть доступ к суперкомпьютеру. Согласно исследованиям, проведенным в 2017 году, 4,8 млрд. человек имеют собственный мобильный телефон, это при общем населении планеты в 7,5 млрд. Американский физик японского происхождения Митио Каку (р. 1947) как-то сказал: «Сегодня в вашем сотовом телефоне заключена бóльшая вычислительная мощность, чем та, что находилась в распоряжении NASA в 1969 г., когда два астронавта впервые ступили на Луну». Сейчас мы можем произвести все необходимые нам вычисления, просто проведя пальцем по экрану телефона, так зачем тогда вообще нужно учить арифметику?

Дело в том, что изучение арифметики позволит вам лучше понять природу чисел. Изучение этой природы раньше носило название «арифметика», но теперь так называют непосредственно процесс подсчета. Ту же область математики, которая занимается природой чисел, сегодня называют «теорией чисел». Специалисты в этой области стремятся понять математические основы нашей Вселенной и природу бесконечности — просто непаханое поле информации!

Для начала давайте совершим небольшую прогулку в зоопарк.

Люди начинали с простого — считали *что-то*, начиная с единицы и далее, используя числа (а точнее, *целые* числа). Эти числа стали называться *натуральными*. Если поместить их в воображаемый зоопарк, то для каждого из них потребуется отдельный вольер:

$$1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots$$

Древние греки не считали ноль натуральным числом, поскольку вы не можете потрогать руками ноль яблок. Однако сегодня мы относим ноль к натуральным числам*, так как он «наводит мост» к *отрицательным* числам. Если добавить ноль

* В российской математической литературе ноль к натуральным числам относить не принято. Однако существует понятие «расширенного натурального ряда», включающего в себя также и ноль. — *Прим. ред.*

в наш воображаемый зоопарк, то он будет выглядеть так:

$$\ldots -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\ldots$$

Теперь мой «зоопарк» содержит также отрицательные числа, которые вместе с натуральными числами образуют совокупность *целых чисел*. Поскольку каждому положительному целому числу теперь соответствует отрицательное число, моему зоопарку нужно в два раза больше вольеров и еще один для нуля. Однако мой бесконечный математический зоопарк не нуждается в расширении — он уже и так бесконечен. Это пример того самого непаханого поля, которое я упоминал ранее.

Есть и другие типы чисел, которые не относятся к целым. Греки предложили отличную идею с яблоками, но, как известно, одно яблоко можно разделить на несколько частей, каждую из которых получит отдельный человек. Я бы хотел отразить это в своем «зоопарке».

Если я начну перечислять все дроби между нулем и единицей, имеет смысл начать с половин, затем третей, четвертей и т. д. Это позволит получить все дроби без пропусков. То есть я последовательно применю все натуральные числа в качестве знаменателя (нижней части дроби). А для каждого знаменателя я последовательно применю различные числа в качестве числителя (верхней части дроби), начиная с единицы и заканчивая числом, равным знаменателю.

ДРОБИ

С помощью дроби можно записать любое число, находящееся в промежутке между целыми. Дробь, как правило, записывается в виде числителя (сверху) и знаменателя (снизу). К примеру, половина будет выглядеть следующим образом:

$$\frac{1}{2}$$

1 — это числитель, 2 — знаменатель. Такая запись показывает, что значение этой дроби равно единице, деленной на два. То есть вы видите, какую долю некоторой одной вещи вы получите, если разделите ее между двумя людьми. Дробь $\frac{3}{4}$ обозначает три вещи, разделенные между четырьмя людьми — то есть каждый получает по три четверти.

Определив все дроби между нулем и единицей, я могу использовать их для определения дробей в промежутках между остальными натуральными числами. Добавив единицу ко всем дробям, расположенным между нулем и единицей, я получу все дроби между единицей и двойкой. Добавив еще одну единицу, я получу все дроби между двойкой и тройкой. Продолжая добавлять единицу, я получу все дроби в промежутках между всеми остальными натуральными числами, а вычитая единицу, — все дроби в промежутках между всеми отрицательными числами.

Итак, у меня есть бесконечная последовательность целых чисел, и мне нужно заполнить каждый промежуток между ними бесконечным количеством вольеров для дробей. Это значит, что мне нужно бесконечное число бесконечностей. Звучит дико, но, к счастью, у меня еще много вольеров.

Поскольку дроби можно записать в виде соотношения, они называются *рациональными* числами*. Теперь у меня в «зоопарке» есть все рациональные числа, которые включают в себя целые числа (т. к. целые числа можно записать в виде дроби, разделив их на единицу), которые, в свою очередь, включают в себя натуральные числа. Закончим с этим.

Немного отвлечемся. 2500 лет назад в Индии математики заявили, что некоторые числа не могут быть записаны в виде дроби; причем слово «некоторые» здесь следует понимать как бесконечное множество. Они выяснили, что не существует такого числа, которое можно возвести в квадрат (умножить само на себя) и получить два, поэтому квадратный корень из двух считается нерациональным числом. Мы не можем записать квадратный корень из двух в виде числа, не округляя его, поэтому оно изображается с использованием символа корня: $\sqrt{2}$.

Есть также и другие важные нерациональные числа, записываемые в виде символов, так как вырисовывать в расчетах бесконечную последовательность, мягко говоря, трудоемко. π, e и ϕ — три

* От латинского слова *ratio* (отношение). — *Прим. ред.*

примера, которые мы рассмотрим позже. Эти числа называются *иррациональными* и им также нужно найти место в нашем «зоопарке». Угадайте, сколько иррациональных чисел есть между последовательными рациональными числами? Правильно — бесконечность! Я по-прежнему легко найду пару лишних бесконечностей вольеров, однако, вероятно, у Кантора* нашлись бы некоторые замечания по этому поводу (см. стр. 20).

КВАДРАТ И КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ

Когда вы умножаете число само на себя, вы возводите его в *квадрат*. Квадрат записывается в виде небольшого индекса (маленькой двойки) над числом:

$$3 \times 3 = 3^2$$

Три в квадрате — девять. Таким образом, *квадратный корень* из девяти — три. Извлечение корня из числа противоположно возведению его в квадрат. Квадратный корень из шестнадцати равен четырем, поскольку четыре в квадрате — шестнадцать:

$$\sqrt{16} = 4$$

Такие числа, как девять и шестнадцать, называются *идеальными* квадратами, так как их квадратный корень — целое число. Любое число, включая

* Георг Кантор (1845–1918) — немецкий математик, создатель теории множеств. — *Прим. ред.*

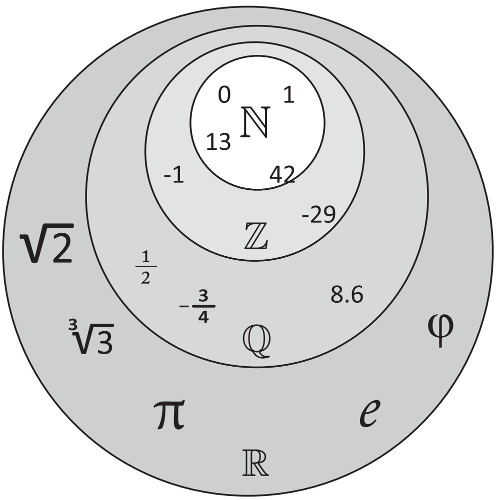
дроби и десятичные дроби, может быть возведено в квадрат. Из любого положительного числа можно извлечь корень.

Чтобы узнать больше, см. стр. 58.

Когда мы объединяем рациональные числа с иррациональными, мы получаем то, что математики называют *действительными* или *вещественными* числами. По аналогии с рассмотренными выше типами чисел, вы можете предположить, что также существуют и недействительные числа, и будете абсолютно правы. Однако, тут я вынужден остановиться и дать моему творению название «*Зоопарк» действительных чисел*». Поскольку в зоопарках животных обычно распределяют по видам, я тоже выделю несколько накладывающихся друг на друга групп чисел разного типа. Мой зоопарк можно представить в виде следующей схемы; для вашего удобства я отметил здесь все главные «достопримечательности»:

«ЗООПАРК» ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ЧИСЕЛ

Я должен здесь отметить, что мой «зоопарк» обязан своим существованием немецкому математику Давиду Гильберту (1862–1943). Он внес огромный вклад в математику и широко прославился своей деятельностью по пропаганде и направлению развития этой области знаний. В 1900 году он подготовил для Международного конгресса математиков список из 23 нерешенных задач — теперь известных как «проблемы Гильберта» — три из которых остаются нерешенными по сей день. Источником вдохновения для моего «зоопарка» послужил сформулированный Гильбертом мысленный эксперимент «*Гранд-отель*».



Обозначения:

$\mathbb{N}$ — натуральные числа

$\mathbb{Z}$ — целые числа

$\mathbb{Q}$ — рациональные числа

$\mathbb{R}$ — действительные числа

В этом эксперименте Гильберт рассмотрел отель с бесконечным количеством комнат, заполненных бесконечным количеством гостей. При этом он показал, что в отель всегда можно дополнительно заселить бесконечное количество гостей, убедив уже проживающих гостей переселиться в комнату, номер которой в два раза больше номера той комнаты, в которой каждый из них проживает. То есть все текущие гости переместятся в комнаты с четными номерами, освободив комнаты с нечетными номерами (которых имеется бесконечное количество) для вновь прибывших гостей.