УЧИМСЯ НА ЧУЖИХ ОШИБКАХ

Составитель А. Д. Блинков

УЧИМСЯ НА ЧУЖИХ ОШИБКАХ

Учимся на чужих ошибках

Составитель А. Д. Блинков

Москва
Издательство МЦНМО
2019

УДК 51(07)
ББК 22.1
Б69

Учимся на чужих ошибках / Составитель А. Д. Блинков. —
Б69 М.: МЦНМО, 2019. — 168 с.

ISBN 978-5-4439-1391-9

В предлагаемой книжке собраны математические тексты, содержащие разнообразные ошибки: в формулировках утверждений, в условиях задач, ответах и решениях. Многие из них или их идеи «пришли» из реальных занятий со школьниками, из различных олимпиад и турниров, из пособий, адресованных учащимся и учителям, но ряд текстов придуман специально. Большинство этих сюжетов ранее было использовано на различных творческих конкурсах учителей математики (в их методической части).

Книжка адресована прежде всего учителям математики, педагогам дополнительного образования, ведущим занятия со школьниками, но может быть интересна и полезна также учащимся 7—11 классов и всем, кто интересуется математикой.

ББК 22.1

12+

Учебно-методическое издание

Учимся на чужих ошибках

Подписано в печать 12.03.2019 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 10,5. Тираж 2000 экз. Заказ №   .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.
119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».
г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.
Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89. E-mail: mittelpress@mail.ru

---

ISBN 978-5-4439-1391-9

Посвящается памяти
Елены Борисовны Гладковой
и Алексея Геннадьевича Мякишева

Введение

Многих любителей математики привлекают «математические софизмы». Широко известны и неоднократно публиковались «доказательства» того, что прямой угол равен тупому, что любой треугольник является равнобедренным и т. п. (см., например, [5] в списке литературы). Читателю таких текстов заранее понятно, что его обманывают, и его основная задача — найти то место в рассуждениях, где это происходит. Популярны были и книжки, в которых наряду с софизмами были представлены реальные ошибки школьников и студентов (см., в частности, [6] и [7]), но с момента их изданий уже прошло много времени.

Большинство текстов, опубликованных в этой книжке, более современны. Основу настоящего сборника составляют реальные задачи, в которых ошибки могут быть как в условиях, так и в ответах и решениях. Есть задачи, в которых условие корректно и даже указанный ответ верен, а ошибки (как одна, так и несколько) содержатся в приведённых решениях. В каких-то случаях приведено несколько решений, среди которых есть как верные, так и неверные. Конечно, есть и задачи с корректным условием, в которых неверное решение привело к неверному ответу, а также известные математические факты, доказательства которых содержат ошибки. Другая категория — задачи с некорректным условием, где просят доказать факт, который оказывается неверным, или числовые данные в условии несовместны и т. д.

В таких случаях читателю заранее неизвестно, где именно допущены ошибки, и во многих случаях ему прежде всего требуется разобраться, корректно ли условие задачи, и если оно некорректно, то почему. Если же условие корректно, то требуется не только найти все ошибки и неточности в решениях, но и «вскрыть характер» допущенных ошибок. Кроме того, желательно самому придумать верное решение.

Многие тексты или их идеи «пришли» к нам из реальных занятий со школьниками, из различных олимпиад и турниров, из пособий, адресованных учащимся и учителям, но ряд текстов придуманы специально. Большинство этих сюжетов ранее было использовано на различных творческих конкурсах учителей математики (в их методической части). Для полноты картины в сборник включено и несколько «классических» текстов на поиск ошибок, которые также использовались на конкурсах учителей, но они составляют подавляющее меньшинство.

Первый раздел предлагаемой книжки включает в себя 125 текстов, содержащих ошибки. Он разделён на три части: 1) арифметика, алгебра и математический анализ; 2) комбинаторика, логика, теория вероятностей; 3) геометрия. Внутри каждой части задания также сгруппированы по сходной тематике. Отметим, что подобное разделение весьма условно, но представляется наиболее удобным для прочтения и использования.

Второй раздел — это подсказки, которыми можно воспользоваться в случае затруднений.

Третий раздел включает в себя анализ ошибок, верные решения и комментарии.

В конце сборника приведены источники всех текстов (в той мере, в какой они известны составителю). Если это реальная задача, то указан её автор и олимпиада, на которой она была использована, а также фамилии тех коллег, которые предложили и обработали данный сюжет для какого-то из творческих конкурсов учителей. В некоторых случаях сюжет (или его основа) был найден в какой-то из публикаций и предложен для конкурса учителей, тогда указан этот источник. Во многих случаях первоисточник составителю неизвестен или же сюжет придуман непосредственно для конкурса, тогда указаны только те, кто его предложили.

Отдельно приведён список литературы и веб-ресурсов, в котором наряду с публикациями, использованными при составлении настоящего сборника, указаны книги и статьи по сходной и родственной тематике.

Составитель выражает глубокую благодарность своим коллегам, работавшим в разные годы в методической комиссии творческих конкурсов учителей, без участия которых эта книжка не могла быть написана: Е. Б. Гладковой, Е. С. Горской, В. М. Гуровицу, А. В. Иванищуку, А. Г. Мякишеву, И. В. Раскиной, А. В. Хачатуряну, Д. Э. Шнолю, а также всем, кто пополнял его коллекцию своими сюжетами с ошибками. Среди последних — особая благодарность А. В. Грибалко и А. В. Шаповалову.

I. Тексты с ошибками

Арифметика, алгебра и математический анализ

Делимость и целые числа

1. В Книге рекордов Гиннеса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377} - 1$. Не опечатка ли это?

2. Найдите два натуральных числа, сумма которых равна 119, а разность квадратов — простое число.

Ответ: 60 и 59.

Решение. Пусть a и b — искомые числа, тогда $a+b=119$ и число a^2-b^2 простое. Так как $a^2-b^2=(a+b)(a-b)$, должно выполняться равенство $a-b=1$. Решая систему уравнений

$$\begin{cases} a+b=119, \\ a-b=1, \end{cases}$$

получим, что $a=60$, $b=59$.

3. Сколько существует натуральных чисел, меньших 200, имеющих ровно четыре делителя и делящихся на 5?

Ответ: 10.

Решение. У любого числа два делителя определяются однозначно: 1 и само число. Третий делитель по условию равен 5. Значит, четвёртый должен быть простым числом: 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Таким образом, искомых чисел ровно 10.

4. Делитель натурального числа называется собственным, если он не равен этому числу и единице. Найдите все натуральные числа, у которых самый большой собственный делитель в 7 раз больше самого маленького собственного делителя.

Ответ: все натуральные числа вида $7q^2$, где q — простое число.

Решение. Наименьший собственный делитель любого натурального числа — простое число, иначе оно не наименьшее. Если m — наибольший, а q — наименьший собственный делитель числа N, то $N = mq$. По условию $m = 7q$, значит, $N = 7q^2$.

5. Можно ли число 197 представить в виде суммы двух натуральных чисел с одинаковой суммой цифр?

Ответ: нельзя.

Решение 1. Попробуем представить число 197 в виде суммы двух чисел, начиная с суммы $196 + 1$. Видим, что суммы цифр данных чисел не равны. Теперь будем отнимать от первого числа по единице и прибавлять единицу ко второму, чтобы сумма сохранялась. Увидим, что, как бы мы ни разбивали 197 на два целых числа, сумма цифр этих чисел всегда будет равняться 17. Пусть в одном из чисел суммы сумма цифр равна m, тогда сумма цифр второго числа $17 - m$. Они равны, если $m = 17 - m$, откуда получаем, что $m = 8{,}5$. Но m — целое число, следовательно, получили противоречие.

Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

Решение 2. Пусть $197 = \overline{xyz} + \overline{ab}$ (понятно, что получить 197, складывая два трёхзначных числа, невозможно, а сумма 98 и 99 не обладает требуемым свойством). Тогда

$$197 = 100x + 10(y + a) + (z + b),$$

откуда получаем, что $x = 1$, $y + a = 9$, $z + b = 7$. Значит, одно из чисел y и a нечётно, а другое чётно. Аналогично для чисел z и b. Если суммы цифр слагаемых равны, то $x + y + z = a + b$, то есть $x + y + z - a - b = 0$. Но алгебраическая сумма трёх нечётных и двух чётных чисел не может быть равна нулю.

Таким образом, 197 нельзя представить в виде суммы двух чисел с одинаковой суммой цифр.

6. Натуральные числа a и b удовлетворяют соотношению

$$2a^2 + a = 3b^2 - b.$$

Докажите, что $a + b$ точный квадрат.

Решение. Перенося $2b^2 - b$ в левую часть равенства, получим, что $2(a^2 - b^2) + a + b = b^2$, то есть $(a + b)(2a - 2b + 1) = b^2$. Осталось заметить, что числа $a + b$ и $2a - 2b + 1$ взаимно просты, следовательно, каждое из них — точный квадрат.

Оглавление

Введение 3

I. Тексты с ошибками 5

Арифметика, алгебра и математический анализ 5
  Делимость и целые числа 5
  Текстовые задачи 9
  Алгебраические выражения 11
  Уравнения и системы 13
  Неравенства и экстремальные значения 18
  Тригонометрия 21
  Задачи с параметром 23
  Функции, производная, первообразная 27

Комбинаторика, логика, теория вероятностей 32
  Логические задачи 32
  Процессы и операции 33
  Соответствия и графы 35
  Сколькими способами? 37
  Вероятность 39
  Разное 40

Геометрия 42
  Планиметрия 42
  Стереометрия 55
  Задачи на экстремальные значения 58
  Нестандартные подходы к определениям и к доказательству известных фактов 61

II. Подсказки 65

III. Анализ ошибок, верные решения и комментарии 71

Арифметика, алгебра и математический анализ 71
  Делимость и целые числа 71
  Текстовые задачи 76
  Алгебраические выражения 78
  Уравнения и системы 82
  Неравенства и экстремальные значения 89
  Тригонометрия 94
  Задачи с параметром 96

Комбинаторика, логика, теория вероятностей 110
Логические задачи 110
Процессы и операции 111
Соответствия и графы 114
Сколькими способами? 117
Вероятность 122
Разное 125

Геометрия 128
Планиметрия 128
Задачи на экстремальные значения 149
Нестандартные подходы к определениям и к доказательству известных фактов 155

Источники задач 161

Литература 166