Комбинаторика

И.В.Раскина, А.В.Шаповалов

Аннотация

Двадцатая книжка серии «Школьные математические кружки» посвящена задачам классической комбинаторики. В них обычно требуется найти число элементов множества, причём порядок их перечисления не очевиден. Основное внимание уделяется общим принципам организации подсчёта и построению адекватных математических моделей. Этот подход позволяет не только запомнить базовые формулы и понятия комбинаторики и научиться их применять, но и развить математическую интуицию и логику.
Книжка содержит восемь занятий математического кружка и обширный набор дополнительных задач. Все занятия доступны ученикам 5—6 классов. Для удобства использования заключительная часть книжки, как всегда, сделана в виде раздаточных материалов. Возможность самостоятельного обучения обеспечена дублированием ответов в отдельном разделе. Книжка адресована школьным учителям математики и руководителям математических кружков. Надеемся, что она будет интересна школьникам и их родителям, студентам педагогических вузов, а также всем любителям математики.

Содержание

Предисловие

-Пишете? - вяло спросил Ухудшанский.
-Специально для вас, - ответил великий комбинатор.
И. Ильф, Е. Петров "Золотой телёнок"

В последние годы всё больше школьников начинают интересоваться математикой довольно рано. Чем это хорошо и чем плохо, обсуждать здесь не будем. Признаем свершившийся (точнее, свершающийся на наших глазах) факт: пик обучения "олимпиадной" математике сдвигается с уроков в старших специализированных классах на разные формы работы, от кружков и летних школ до тех же спецклассов, но уже для пяти-, шести- и семиклассников. В том возрасте, в котором многие годы считалось достаточным заинтересовать учеников и подготовить их к будущему "настоящему обучению", теперь требуется учить по-настоящему.

Не все разделы математики одинаково эффективно переносятся на несколько лет раньше. Возрастные особенности никуда не делись. Пятиклассникам по-прежнему проще считать, чем доказывать. Они норовят перебирать случаи, а не рассуждать универсально. Но ведь именно с этого - перебора вариантов и ответа на любимый детьми вопрос "Сколько?" - и начинается комбинаторика! Кроме того, в ней не слишком мало и не слишком много видов стандартных задач-одноходовок, решать которые может натренироваться почти любой ученик. Поэтому при грамотном преподавании комбинаторика усваивается в 5-6 классах ничуть не хуже традиционной школьной программы. Этим она выгодно отличается от большинства традиционных олимпиадных тем, связанных со строгими доказательствами.

Цель данной книжки - адаптировать "краткий курс комбинаторики" для кружка в 5-6 классах. Раз уж появилось слово "цель", самое время задуматься о целях изучения комбинаторики в этом возрасте.

Цель, лежащая на поверхности: изучить заранее комбинаторную часть курса теории вероятностей и статистики, на который в 7-9 классах вечно не хватает времени. Но это лучше делать со всем классом, а не на кружке. Предлагаемый нами путь к этой цели тоже приведёт, но далеко не самым экономичным путём.

Цель поглубже: научить организации вычислений. Посчитать число элементов множества, где элементы не перечислены явно, а описаны свойствами – часто встречающаяся задача. Для её решения умение логично мыслить и анализировать важнее знания формул. Тем более важно начать эти навыки прививать с юных лет.

А что совсем в глубине? То же, что и всегда: развитие математического мышления. Если конкретнее, умение строить математические модели. Этим модным словосочетанием методисты любят называть составление уравнения по условию текстовой задачи. Ну, хорошо, иногда системы или даже неравенства. Но арсенал базовых математических моделей, доступных школьнику, гораздо разнообразнее: графы, таблицы, последовательности букв или цифр (то есть слова или многозначные числа) и т.д. Их можно использовать не только при решении трудных олимпиадных задач, доступных немногим, но и для стандартизации типовых задач. И полезно учиться строить модели посложнее, комбинируя базовые.

Деятельность многих выпускников, получивших хорошее математическое образование, сегодня связана с информатикой. Профессия аналитика становится массовой. Завтра массовые профессии наших лучших учеников будет называться по-другому. Но, скорее всего, на рабочем месте они по-прежнему будут решать прикладные задачи математическими методами. С чего начинается решение новой задачи? С вопросов: "Не решал ли я или кто-то ещё подобную задачу? Как решилась та задача? Как модифицировать готовое решение и применить его в новых условиях?"

Хотите дать своим ученикам конкурентное преимущество в будущем? Учите их переводить внешне разные задачи на удобный язык и видеть, что задача на самом деле одна и та же. Или, без всякого перевода на какой-то особый язык, просто узнавать, что задача похожа на вчерашнюю, и решать её можно точно так же. Комбинаторика - очень удобная область для развития таких навыков. В этом и состоит стратегическая цель, а вовсе не в разучивании конкретных типов задач, которые мало где встретятся кроме контрольной работы или олимпиады.

Сведение задачи к решённой ранее или вообще к стандартной модели в комбинаторике часто называют *кодированием*. Идея кодирования и связанного с ним родства задач красной нитью проходит через всю книжку. Наиболее подробно она обсуждается на третьем, пятом и шестом занятиях. Но подготовка к её восприятию начинается с первого занятия (придание точкам буквенных имён для удобства записи решения), продолжается на втором (неоднократно решается одна и та же задача подсчёта пар в разных формулировках) и активно повторяется на восьмом занятии. Постепенно вводятся модели, к которым удобно сводить комбинаторные задачи:

- клетки таблицы (с первого занятия);
- числа как строки цифр (с первого занятия);
- строки символов (с третьего занятия);
- слова как строки букв, включая бессмысленные (с пятого занятия).

В предварительном комментарии к пятому занятию подробно описаны методы установления родства задач, а на шестом предлагается закрепить их в игровой форме.

От стратегической цели вернёмся к тактической: перенести изучение основ комбинаторики в 5-6 классы. Её достижению мешает мифы, которые хотелось бы развеять:

1. На первом этапе надо объяснить, что такое перестановки, размещения и сочетания с повторениями и без них, натренировать решать задачи этих шести типов и не путать их. Это неправда. Многие победители олимпиад и даже профессиональные математики "знают по имени" только два из шести: перестановки и сочетания (без повторений), которые широко используются в математике. Это не мешает им успешно решать задачи.
2. Решение комбинаторных задач требует знания формул и алгебраической культуры. И это неправда. Подсчёт стоимости трёх двадцатирублёвых шоколадок не требует ведь знания формулы про цену, количество и стоимость в общем виде?
3. Комбинаторные задачи нестандартны и требуют сообразительности. Это тоже неправда. Нестандартной может быть или не быть задача из любой области. Как раз в комбинаторике много стандартных задач, решаемых по одинаковым схемам.
4. Раз основных типов задач немного, можно обучить комбинаторике за шесть занятий, по одному на каждый тип задач. А лучше за 4, по одному на правила умножения, сложения, вычитания и деления. Ну-ну... Почему бы заодно не попробовать изучить текстовые задачи за три урока, по одному на задачи на движение, работу и проценты? А когда не получится, перенести изучение текстовых задач в старшие классы.

Последний вопрос риторический. И дело не только в разнообразии текстовых задач и сложности некоторых из них. Вообще (почти) никого (почти) ничему нельзя научить за одно занятие. Рассказать можно, а научить нет. Да и за два занятия тоже почти никого почти ничему. Где взять время на несколько занятий по каждому из четырёх правил?

Ответ известен и реализуется на хорошем школьном уроке. Позавчерашнее повторили, вчерашнее углубили, сегодняшнее узнали и слегка потренировали, на завтрашнее намекнули. В таком стиле мы и старались составлять занятия для этой книжке. Вместо набора независимых ярких сюжетов мы предлагаем одновременное развитие многих линий. Каждое занятие имеет название, подчёркивающее его основное содержание. Но чем важнее идея, тем шире она распространяется и на другие занятия. Поясним это на примере *дерева перебора*, которое мы считаем вторым по важности после кодирования методом решения комбинаторных задач. Наиболее подробный разговор о деревьях ведётся на пятом занятии, что ясно из его названия. Но эпизодически деревья используются, начиная с самого первого занятия (вначале как иллюстрация к уже решённой задаче), а на третьем - довольно интенсивно. На шестом занятии подчёркивается роль деревьев в установлении родства задач-одноходовок, а на седьмом "составные" деревья используются в задачах, комбинирующих сложение и умножение.

Наряду с общими методами комбинаторики (к уже названным кодированию и деревьям добавим счёт по группам, правила умножения, сложения, вычитания и деления) ученики постепенно знакомятся с джентльменским набором типовых задач:

- подсчёт неупорядоченных пар (занятие 2),
- подсчёт строк символов (размещений) с повторениями (занятие 3) и без (занятие 5),
- подсчёт всех подмножеств данного множества (занятие 3),
- подсчёт перестановок (занятие 5),
- подсчёт сочетаний (занятие 8).

Каждый тип задач неоднократно повторяется на последующих занятиях. Перестановки с повторениями и сочетания с повторениями не вошли в этот выпуск.

Специальное внимание уделяется развитию общекультурных навыков:

- использование "маленьких случаев" для угадывания ответа и для самоконтроля,
- решение задачи двумя способами для самоконтроля и для доказательства формул,
- использование геометрических иллюстраций (в том числе графов, таблиц, кругов Эйлера).

Все перечисленные методы помогают не только найти количество элементов некоторого множества, но и осознать структуру этого множества. Вопрос "Сколько?" провоцирует учителя поскорее вооружить ученика формулами. Но формулы вторичны, а первично умение перечислять все элементы множества. В этой книжке с явного перечисления "маленьких" множеств начинается знакомство с каждым типом задач. При переходе к "большим" множествам перечисление не теряет актуальности. Вопрос "Перечислите все..." трансформируется в описание, как можно было бы перечислить все элементы множества (например, разбив случаи на группы или частично изобразив дерево перебора). В некоторых задачах требуется найти элемент множества, находящийся при перечислении на определённом месте.

Сложную структуру (каждая тема изучается на нескольких занятиях, каждое занятие преследует несколько целей) трудно транслировать без потерь. Цели занятия и роли конкретных задач поясняются в *комментариях*, расположенных в начале каждого занятия и после некоторых задач. Вместо лаконичных *решений* ко многим задачам предлагаются подробные *обсуждения*, включающие также возможные пути к решению, связи с другими задачами, анализ полученного ответа и т.п. К некоторым задачам предложено более одного решения. Стоит ли тратить время на второе решение? Стоит, если это способ показать или закрепить полезный метод. Здесь важен баланс. Какие-то задачи разбирает учитель, обращая внимание на все важные с его точки зрения детали. Другие решают ученики так, как им удобнее, лишь бы правильно. Какие-то из них учитель в конце занятия разберёт, какие-то нет. Разделение задач на задачи для разбора и для самостоятельного решения условно и зависит от особенностей конкретного кружка. Организовать индивидуальную работу и повторение поможет список *дополнительных задач*, часть из них новые, часть являются переформулировками известных.

Школьникам, работающим с книгой самостоятельно, мы предлагаем сначала познакомиться с условиями задач очередного занятия по *раздаточным материалам* в конце книжки и порешать их, затем проверить себя по *ответам*, вынесенным в отдельный раздел, и подумать ещё, если ответ не сходится. И лишь после этого прочитать полный текст занятия.

В 1969 году была впервые опубликована замечательная книга Н.Я. Виленкина и др. "Комбинаторика", адресованная старшеклассникам и первокурсникам. Похоже, все русскоязычные бумажные и электронные пособия по комбинаторике вышли из неё, как из гоголевской шинели. Через 25 лет адаптированный для учеников 6-9 классов курс комбинаторики был изложен в изданной 1994 году книге С. А. Генкина и др. "Ленинградские математические кружки". С тех пор прошло ещё 25 лет. Авторы постарались осмыслить и частично изложить накопившийся за это время опыт работы летних математических школ (в первую очередь Кировской) и кружков. Мы надеемся, что предложенные занятия помогут освоить основы комбинаторики любознательным ученикам 5-6 классов массовой школы. Вопросы следующего уровня вынесены в отдельный выпуск. К ним, в частности, относятся связь дерева перебора с алфавитным порядком перечисления, правило деления, соответствие, треугольник Паскаля, метод шаров и перегородок.

Занятие 1.

Перечисление. Таблицы. Умножение

— Ой! Теперь он и тебя сосчитал.
— Ну, он за это поплатится!
из мультфильма "Козлёнок, который считал до десяти"

Как узнать, сколько (детей на прогулке, монет в сундуке, отрезков на чертеже, чисел с нужными свойствами - нужное подчеркнуть)? Надёжнее всего перечислить, приговаривая "Первый, второй,..." А как не запутаться, считали этого ребёнка или ещё нет? А вот пусть не бегают, а построятся по порядку. Детей многие умеют строить, но разве можно построить пересекающиеся отрезки? Можно, если строить не сами отрезки, а их имена (да и детей иногда удобнее посчитать по списку). А как посчитать быстро и точно, если детей много? Пусть построятся хотя бы парами или даже в колонну по 4. Видишь 9 таких четвёрок - значит, детей 36. Итак:

- Ответ на вопрос "Сколько?" связан с перечислением.
- Вместо самих объектов бывает удобнее считать их имена (задача 1.2).
- Удобнее считать то, что разделено на группы.
- Разделение на группы можно оформить в виде таблицы (каждая группа – строка или столбец). Тогда задача сведётся к подсчёту заполненных клеток таблицы.
- Если группы равные, то число клеток таблицы находят умножением.
- Две задачи могут формулироваться совсем по-разному. Но если им соответствует одинаковая таблица (и вообще, одинаковая "картинка"), то и решения будут аналогичными, и ответы совпадут (задачи 1.2 и 1.3, а также 1.5 и 1.6).

Замечания по отдельным задачам

- В задаче 1.1 достаточно обсудить один вид таблиц. Но если кто-то из детей предложит другой вид, это тоже интересно. В задаче 1.2 рекомендуем рассмотреть оба порядка перечисления. Обычно вопрос "Кто-нибудь считал по-другому?" пользуется успехом. В крайнем случае, второй способ может предложить и сам учитель. А вот в задаче 1.3 альтернативные способы подсчёта лучше замять. Аккуратный ученик может за 5 минут перечислить все нужные числа в порядке возрастания, пользы от этого никакой.
- Пятиклассники могут быть незнакомы с понятием простого числа (см. задачу 1.3). Это несложно пояснить на примерах и вместе с детьми выписать четыре нужных числа.
- Замечание к задаче 1.4 советуем не пропустить. Оно подводит к пониманию того, что разделение на группы удобно описывается таблицей, но если каждая группа разделяется на более мелкие, а те – на ещё более мелкие, и так происходит несколько раз, удобнее дерево. Переход от таблиц к деревьям отрабатывается на третьем и пятом занятиях.

Задача 1.1. Пять учеников Хогвартса изучили семь чудес и успешно сдали экзамен трём волшебникам. На экзамене каждый ученик совершил по одному чуду по указанию каждого из волшебников и получил за это плюсик.

а) Сколько всего плюсиков поставлено на экзамене?

б) Приведите пример таблицы, из которой видно, кто кому какое чудо продемонстрировал.

***Обсуждение**. **а)** Каждый из пяти учеников получил по три плюсика. А всего плюсиков* $5 \cdot 3 = 15$.

б) *Назовём волшебников А, Б и В, а чудеса занумеруем числами от 1 до 7. Тогда таблица могла выглядеть, например, так. Заполняя её, мы считали, что одного и того же ученика разные волшебники не просили совершить одно и то же чудо. Но если бы и просили, в таблице всё равно было бы 15 заполненных клеток.*

	А	Б	В
Первый ученик	1	3	7
Второй ученик	2	6	5
Третий ученик	5	4	2
Четвёртый ученик	7	4	3
Пятый ученик	5	2	3

Таблицу с той же самой информацией можно организовать и по-другому. В каждой строке здесь тоже по три заполненных клетки.

	1	2	3	4	5	6	7
Первый ученик	А		Б				В
Второй ученик		А			В	Б	
Третий ученик		В		Б	А		
Четвёртый ученик			В	Б			А
Пятый ученик		Б	В		А		

Задача 1.2. На прямой отметили 5 точек. Сколько отрезков образовалось на чертеже? (Считаются и отрезки, у которых, кроме концов, есть отмеченные точки внутри)

Обсуждение. *Самый простой и надёжный способ подсчитать что-то – <u>перечисление</u>. Для этого удобно ввести <u>обозначения</u> (см. рис. 1). Чтобы не запутаться, перечислять будем <u>в определённом порядке</u>. В каком именно - дело вкуса. Например, можно начать с "одинарных отрезков", их четыре: AB, BC, CD и DE. Запишем их в первый столбик. Во второй запишем "двойные" отрезки, в третий – "тройные", а четвёртый столбик будет состоять всего из одного отрезка: AE (рис. 2). Всего отрезков 4+3+2+1=10.*

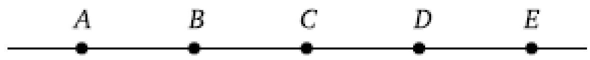


Рис. 1

AB	*AC*	*AD*	*AE*
BC	*BD*	*BE*	
CD	*CE*		
DE			

Рис. 2

AB	*BC*	*CD*	*DE*
AC	*BD*	*CE*	
AD	*BE*		
AE			

Рис. 3

Можно было перечислять точки и в алфавитном порядке: в первом столбике все на букву A, во втором – на букву B, в третьем – на C, а в четвёртом будет единственный отрезок DE (рис. 3).

Приглядевшись, замечаем, что рисунки 2 и 3 отличается лишь тем, что столбики превратились в строчки и наоборот.

Задача 1.3. Выпишите без повторов все числа, которые можно представить как произведение двух однозначных простых чисел (возможно, одинаковых). Сколько их всего?

Обсуждение. *В предыдущей задаче каждый отрезок описывался двумя точками – концами отрезка. А здесь каждое число будем описывать парой множителей. Составим таблицу, записывая в клетки произведения соответствующих множителей (см. рис.). Нижняя половина не заполнена, так как из-за переместительного закона умножения числа получатся те же самые. Выпишем все числа слева направо и сверху вниз: 4, 6, 10, 14, 9, 15, 21, 25, 35, 47. Заметим, что это не совсем порядок возрастания. Всего чисел 4+3+2+1=10. Совпадение ответов с предыдущей задачей не случайно, оно связано со сходством таблиц.*

	2	3	5	7
2	4	6	10	14
3		9	15	21
5			25	35
7				49

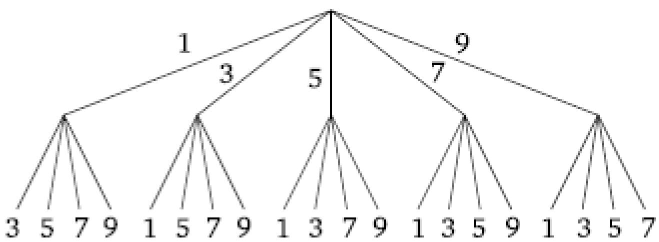
Задача 1.4. а) Мальвина велела Буратино выписать все двузначные числа, у которых обе цифры нечётны и не повторяются. Если он пропустит хотя бы одно, то Мальвине придётся посадить его в чулан. Посоветуйте Буратино, как организовать работу так, чтобы не попасть в чулан. Сколько всего чисел ему придётся выписать?

б) Тем временем Мальвина выписала все трёхзначные числа, у которых все цифры нечётны и не повторяются. Сколько времени она потратила, записывая по одной *цифре* в секунду?

Обсуждение. ***а)*** *Буратино ничего не забудет, если сначала составит таблицу, учитывая, что и в разряде десятков, и в разряде единиц могут находиться цифры 1, 3, 5, 7, 9. Видно, что в таблице 2(4+3+2+1)=20 чисел.*

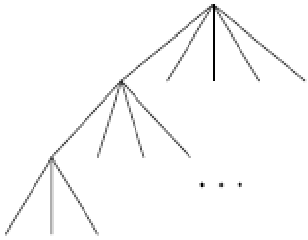
	1	3	5	7	9
1		13	15	17	19
3	31		35	37	39
5	51	53		57	59
7	71	73	75		79
9	91	93	95	97	

Количество чисел можно было подсчитать и без непосредственного выписывания из всех. На первом месте может быть любая из пяти цифр, поэтому строк в таблице пять. На втором – любая из четырёх оставшихся, то есть в каждой строке по четыре числа. А всего чисел $5\cdot 4=20$. *Разделение на пять групп, в каждой из которых по четыре числа, можно схематически проиллюстрировать: (см рис). Такая схема называется <u>деревом</u>, хотя похожа скорее на куст, растущий почему-то вниз.*



***б)** Как применить идею таблицы к трёхзначным числам? Нарисовать вместо прямоугольника параллелепипед? Сложновато. Если ограничиться двумерной таблицей, то придётся удлинить строку, записав в неё уже не 5 цифр, а 20 двузначных чисел, которые написал Буратино. Каждое можно продолжить тремя способами. Например, 13 можно продолжить до 135, 137 и 139. Поэтому Мальвина написала в 3 раза больше чисел, чем Буратино:* $5\cdot4\cdot3=60$. *Для этого ей пришлось написать 180 цифр, потратив 180 секунд или 3 минуты.*

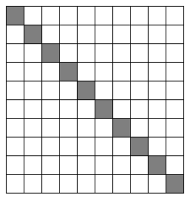
Если рассуждать не с помощью таблицы, а с помощью дерева, то придётся пририсовать третий этаж. На первом числа разбиваются на 5 групп в зависимости от первой цифры. На втором каждая из пяти групп разбивается на 4 группки поменьше в зависимости от второй цифры. В каждой маленькой группке три числа, так как для написания третьей цифры есть три возможности. Так же, как мы на стали выписывать таблицу с 20 столбцами, дерево тоже незачем рисовать целиком. Достаточно, например, так.



***Замечание.** С двузначными и трёхзначными числами мы разобрались. Интересно, а сколько есть четырёхзначных чисел, составленных из неповторяющихся нечётных цифр? Пририсуем к дереву ещё один этаж, на котором от каждой веточки отходят по две более мелких. Получим* $5\cdot4\cdot3\cdot2=120$ *чисел.*

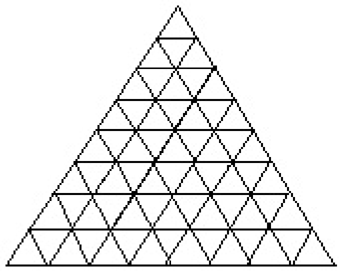
А сколько таких пятизначных чисел? Этаж-то к дереву пририсовать можно, но от добавления множителя 1 произведение не изменится, пятизначных чисел тоже 120. Подумайте, сколько шестизначных и ещё более длинных чисел.

Задачи для самостоятельного решения



Задача 1.5. Сколько клеток в квадрате 10х10 лежат выше закрашенной диагонали (см. рис.)?

Задача 1.6. На прямой отметили 10 точек. Сколько отрезков образовалось на чертеже?



Задача 1.7. На сколько меньших треугольничков со стороной 1 разбит треугольник со стороной 8 на рисунке?

Задача 1.8. В деревне Простоквашино 16 мальчиков и 14 девочек. На 1 сентября каждый мальчик подарил по цветку каждой девочке и ещё 1 цветок Марье Ивановне, а потом девочки тоже подарили все полученные цветы Марье Ивановне. Сколько килограммов цветов принесла своей козе Марья Ивановна, если каждый весил по 50 г?

Задача 1.9. Из спичек сложен разбитый на клетки квадрат 8х8, сторона каждой клетки – 1 спичка. Сколько всего спичек понадобилось?

Задача 1.10. Сколько всего трехзначных чисел, у которых первая и вторая цифры разной четности, а сумма цифр делится на 10?

К задачам этого занятия можно добавить дополнительные задачи Д.1-Д.10.

Решения

1.5. В первой строке 9 клеток, во второй 8 и т.д. Всего 9+8+7+6+5+4+3+2+1=45 клеток. Для подсчёта таких сумм удобно объединять числа в пары от краёв к середине: (9+1)+(8+2)+(7+3)+(6+4)+5=45.

1.6. Обозначим, как и в задаче 1.2, отмеченные точки буквами A, B, C,... Отрезки можно выписать в столбики как по размеру, так и по алфавиту. Важно не перепутать, сколько отрезков в первом столбике (или строке). Когда точек было 5, отрезков в первом столбике было 4. А если точек 10, то в первом столбике 9 отрезков по той же причине. А всего 9+8+...+2+1=45.

Комментарий. У задач 1.5 и 1.6 условия на первый взгляд разные, но ответы одинаковые. Почему совпали ответы? Потому что совпали вычисления: 9+8+7+6+5+4+3+2+1. А почему совпали вычисления? Потому что совпали картинки: треугольная часть таблицы со строками в 9, 8, ..., 1 клеток.

1.7. В верхней строке 1 треугольник, во второй 3 треугольника, в третьей 5. В последней, восьмой строке 8+7=15 треугольников. Сложим 8 слагаемых 1+3+...+15. Они разбиваются на 4 пары с одинаковой суммой 1+15=16. Всего треугольников $4 \cdot 16 = 64$.

1.8. Каждый мальчик принёс 15 цветов. Все мальчики принесли $16 \cdot 15 = 240$ цветов. Масса всех цветов $50 \cdot 240 = 12000\textit{г} = 12\textit{кг}$.

1.9. Разделим спички на две группы: лежащие вертикально и лежащие горизонтально. Вертикальных рядов 8+1=9. В каждом ряду по 8 спичек. Всего вертикальных спичек 72. Горизонтальных столько же. Всего понадобилось $2 \cdot 8 \cdot 9 = 144$ спички.

1.10. Разобьём все числа на группы в зависимости от первой цифры. Таких групп 9, так как первая цифра не может быть нулём. У второй цифры чётность должна быть другой, поэтому для каждой первой цифры есть 5 подходящих вторых цифр (0, 2, 4, 6, 8 при нечётной первой цифре и 1, 3, 5, 7, 9 при чётной). Сумма двух первых цифр – это число от 1+0=1 до 9+8=17. Если сумма получилась от 1 до 10, то, прибавляя однозначное число, её единственным образом можно дополнить до 10 и нельзя дополнить до других чисел, делящихся на 10. А если от 11 до 17, то её единственным образом можно дополнить до 20 и нельзя дополнить до других чисел, делящихся на 10. Поэтому каждую пару первых двух цифр разной чётности можно единственным образом дополнить до числа, соответствующего условию задачи. А таких пар $9 \cdot 5 = 45$.
Комментарий. Мы выяснили, что каждое искомое число *однозначно задаётся* первыми двумя цифрами. Это значит, что можно было считать только пары первых двух цифр.