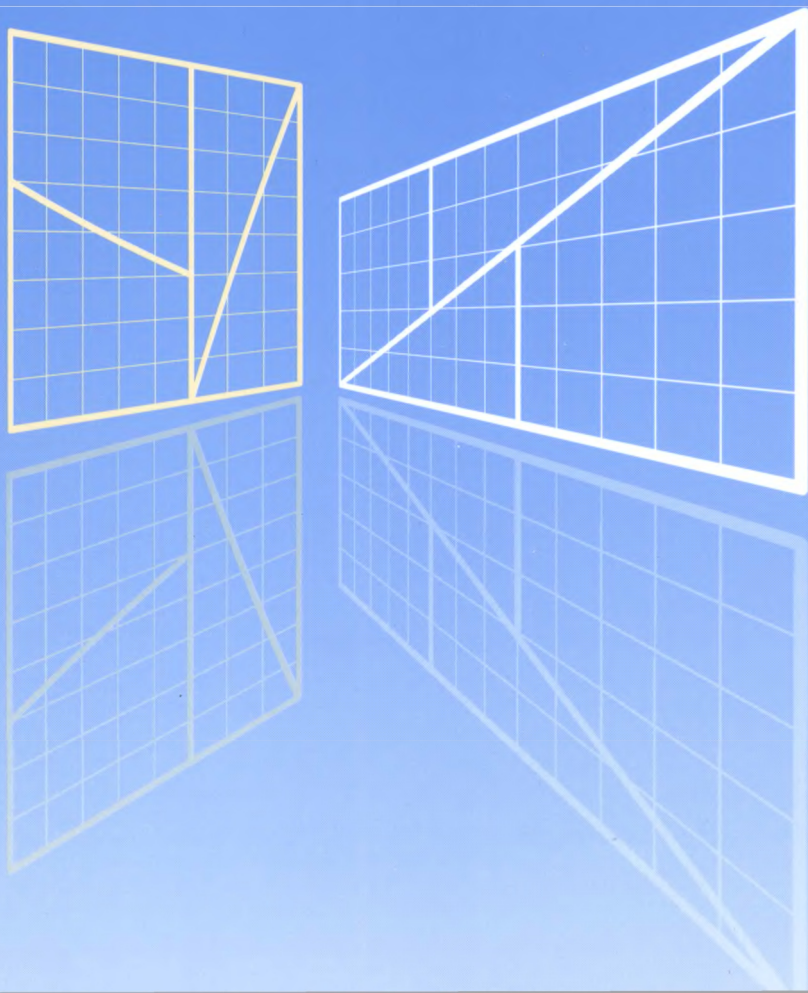


С. М. Львовский

Что не так?

Математические парадоксы
и софизмы



С. М. Львовский

Что не так?

Математические парадоксы и софизмы

Москва
Издательство МЦНМО
2019

УДК 51(07)

ББК 22.1

Л89

Львовский С. М.

Л89 Что не так? Математические парадоксы и софизмы. — М.: МЦНМО, 2019. — 56 с.: ил.

ISBN 978-5-4439-1372-8

В первой главе брошюры собрано 25 занимательных примеров ошибочных математических и логических рассуждений; читателю предлагается найти в этих рассуждениях ошибки, а затем свериться с разбором ошибок, приведенным во второй главе.

Для всех интересующихся математикой, начиная со школьников.

ББК 22.1



Научно-популярное издание

Сергей Михайлович Львовский

ЧТО НЕ ТАК?

Математические парадоксы и софизмы

Подписано в печать 23.11.2018 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 3,5. Тираж 3000 экз. Заказ №

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

Отпечатано в типографии ООО «Принт сервис групп».

Тел./факс (499) 785-05-18, E-mail: 3565264@mail.ru, www.printsg.ru.
105187, г. Москва, ул. Борисовская, д. 14, стр. 6.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине
«Математическая книга». Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mccme.ru

ISBN 978-5-4439-1372-8

© Львовский С. М., 2019
© МЦНМО, 2019

Предисловие

Он хотел взглянуть на прыщик, который вчерашнего вечера вскочил у него на носу; но, к величайшему изумлению, увидел, что у него вместо носа совершенно гладкое место!

Н. В. Гоголь. Нос

Парадокс, согласно толковым словарям, — это утверждение, противоречащее здравому смыслу. Софизм — это рассуждение, кажущееся логичным, но скрывающее ошибку.

В этой брошюре собраны 25 математических и околomатематических парадоксов и софизмов. В главе 1 приводятся ошибочные рассуждения со странными выводами¹⁾. Обсуждения софизмов с разъяснениями, где спряталась ошибка, вынесены во вторую главу, чтоб не лишать читателя удовольствия поискать ошибки самостоятельно. Иногда при анализе софизмов в главе 2 кроме самого указания на ошибку приводится краткое обсуждение смежных вопросов.

Софизмы, собранные в книжке, довольно разнородны: в некоторых из них ошибка сразу бросается в глаза, в других ее обнаружить непросто, а кое-какие из парадоксов возникли в ходе научных исследований и были в свое время предметом размышлений ведущих математиков. Но большинство софизмов и парадоксов из этой брошюры были когда-то сочинены специально, для развлечения, и давно вошли в «математический фольклор».

Многие софизмы, обсуждаемые в этой брошюре, заимствованы из двух книг: замечательной книги Я. С. Дубнова «Ошибки в геометрических доказательствах» [5] (первое издание ее вышло в 1953 году, и после этого она несколько раз переиздавалась) и вышедшей в 1920 году в Петрограде переводной книги [6] В. Литцмана и Ф. Трира «Где ошибка?» (перевод с немецкого; в этой книге софизмы приведены без разъяснений, в надежде, что читатель разберется в них сам). Впрочем, целый ряд софизмов, приведенных в книге Дубнова, есть уже у Литцмана и Трира (см. выше про математический фольклор). В некоторых случаях я воспроизводил фрагменты из [5] и [6] весьма близко к тексту (такие случаи мною отмечены), в других случаях изложение Дубнова или Литцмана—Трира было подвергнуто

¹⁾ Обычно эта странность бросается в глаза, но в некоторых случаях надо немного подумать, чтобы понять, что доказанное утверждение неверно.

переработке, порой — серьезной. Для софизмов, в книгах [5] и [6] не представленных, указать точный источник я не берусь.

Я попытался сгруппировать софизмы по темам, а также расположить их более или менее в порядке возрастания подготовки, необходимой для их понимания. Для нескольких последних софизмов требуется знакомство с началами математического анализа (первого семестра вуза с математической специализацией хватит с большим запасом), для остальных достаточно школьной программы.

Обсуждения софизмов не менее разнородны, чем сами софизмы: иногда все обсуждение укладывается в две строчки, иногда оно растягивается на несколько страниц.

Приступая к самостоятельному поиску ошибок, полезно иметь в виду, что неправильные рассуждения бывают неправильны по-разному. Бывает, что рассуждение и само неправильно, и «доказывает» ерунду, но бывает и так, что с помощью неверного рассуждения приходят к верному выводу, а ошибка в рассуждении сам этот вывод не компрометирует (из неверного утверждения $2 + 2 = 5$ вытекает верное утверждение $2 + 2 > 3$; в главе 1 есть менее грубые примеры). Иногда после обнаружения в доказательстве ошибки от него вообще ничего не остается; иногда в неверном доказательстве присутствует «рациональное зерно», и тогда после исправления ошибки оказывается, что действительно кое-что доказано (но не то, что было заявлено); бывает и так, что рассуждение, ведущее к нелепому выводу, ошибок вовсе не содержит, а парадокс получился оттого, что мы неправильно понимали, что именно доказано.

Я благодарен Ю. Н. Торхову, убедившему меня написать эту книжку. При работе над ней мне были полезны беседы с И. Р. Высоцким о современной школьной программе по стереометрии. Блогер `mtsyr` с платформы `livejournal.com` напомнил мне про софизм с интегрированием по частям. В. Л. Львовской я обязан ценным обсуждением парадокса «Учебная тревога».

Глава 1

Формулировка софизмов

Первые несколько софизмов будут относиться к школьному курсу алгебры (или, если угодно, алгебры и начал анализа). Большинство из них несложные, а начнем мы и с совсем простого.

Формулировки софизмов 1–4 взяты из книги [6], иногда с небольшими изменениями.

1. $4 = 5$, или Тожественные преобразования

Исходя из не вызывающего сомнений равенства $-20 = -20$, проведем следующие преобразования:

$$\begin{aligned} -20 &= -20; \\ 16 - 36 &= 25 - 45; \\ 16 - 36 + \frac{81}{4} &= 25 - 45 + \frac{81}{4}; \\ \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2 &= \left(5 - \frac{9}{2}\right)^2; \\ 4 - \frac{9}{2} &= 5 - \frac{9}{2}; \\ 4 &= 5. \end{aligned}$$

2. Если $a > b > 0$, то $a > 2b$, или Работаем с неравенствами

Пусть $a > b$ (a и b — положительные числа). Из неравенства

$$a > b \tag{1}$$

следует, что

$$a \cdot b > b^2$$

и дальше, если обе части неравенства уменьшить на a^2 ,

$$a \cdot b - a^2 > b^2 - a^2.$$

Поделив на $(b - a)$, получаем:

$$a > b + a.$$

Оглавление

Предисловие	3
Глава 1. Формулировка софизмов	5
1. $4 = 5$, или Тожественные преобразования	5
2. Если $a > b > 0$, то $a > 2b$, или Работаем с неравенствами . . .	5
3. $4 = 8$, или Решаем системы уравнений	6
4. $1 = -1$, или Логарифмы отрицательных чисел	6
5. $64 = 65$, или Разрезаем и складываем	7
6. Простое доказательство того, что сумма углов треугольника равна 180°	7
7. Сумма углов сферического треугольника	8
8. Все треугольники равнобедренные	9
9. Прямой угол равен тупому	11
10. Прямоугольник, вписанный в квадрат	12
11. Новый признак равенства треугольников	13
12. Все прямые параллельны	14
13. Все числа равны	16
14. Все люди лысые	16
15. Парадокс учебной тревоги	17
16. Парадокс брадобреля	17
17. Парадокс Уайтхеда—Рассела	18
18. Парадокс Берри	18
19. $\pi = 2$, или Волны	19
20. $\ln 2 = 0$, или Бесконечные ряды	20
21. $\frac{1}{2} = \frac{1}{3} = \frac{1}{4}$, или Степенные ряды	21
22. $1 = 0$, или Интегрирование по частям	22
23. $\pi = \frac{8\sqrt{2}}{3} \approx 3,77$, или Асимптотика	23
24. $\pi = 4$, или Площадь сферы	24
25. Парадокс воронки	25
Глава 2. Анализ софизмов	28
Литература	55

Правда ли, что все прямые параллельны? А что все числа равны?
А что все треугольники равнобедренные?
А если вам расскажут доказательство какого-нибудь из этих поразительных утверждений – ошибку в нём найдёте?

В этой брошюре собрано 25 знаменитых софизмов – ошибочных математических и логических рассуждений. Поиск ошибок в рассуждениях – важная часть работы профессионального математика, так что читатель этой книжки сможет побыть «в шкуре» учёного.

Для всех интересующихся математикой, начиная со школьников.

Автор – доцент НИУ ВШЭ
и научный сотрудник ФГУ ФНЦ НИИСИ РАН.

ISBN 978-5-4439-1372-8



9 785443 913728 >