

НЕЛЛИ ЛИТВАК

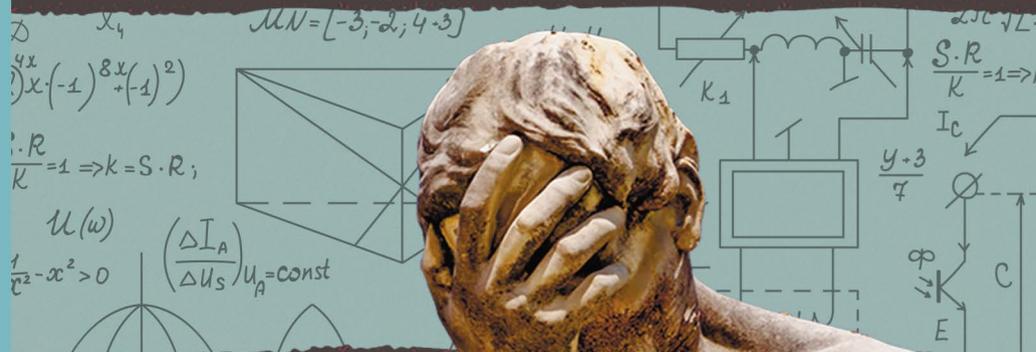


АЛЛА КЕЧЕДЖАН

МАТЕМАТИКА

для

БЕЗНАДЕЖНЫХ ГУМАНИТАРИЕВ



для тех,
кто учил языки,
литературу
и прочую
лирику



БЕЗНАДЕЖНЫЙ ГУМАНИТАРИЙ

**НЕЛЛИ ЛИТВАК,
АЛЛА КЕЧЕДЖАН**

МАТЕМАТИКА
ДЛЯ БЕЗНАДЕЖНЫХ
ГУМАНИТАРИЕВ

*Для тех, кто учил языки,
литературу и прочую лирику*



Издательство АСТ
Москва

УДК 510.2
ББК 22.1
Л 64

Фото авторов на обложке:
© *Rob Stork, Eindhoven* и © Мария Королева

Литвак, Нелли Владимировна.

Л 64 Математика для безнадежных гуманитариев. Для тех, кто учил языки, литературу и прочую лирику / Н. В. Литвак, А. Г. Кечеджан. — Москва : Издательство АСТ, 2019. — 270, [2] с. : ил. — (Безнадёжный гуманитарий).

ISBN 978-5-17-983359-8

Если вы убеждены в существовании особых математических способностей или считаете слово «гуманитарий» оскорблением, вы попали в ловушку устаревших стереотипов. Профессор математики, лауреат премии «Просветитель» Нелли Литвак и креативный продюсер Алла Кечеджан не только докажут вам, что математика доступна абсолютно всем, но и научат смотреть на мир через призму этой науки.

Если вы считаете себя гуманитарием, вы узнаете, какие математические законы связывают паркет на полу комнаты с вращением спутника и биением сердца.

Если вы считаете себя математиком, вы узнаете, как избежать систематической ошибки выжившего, а уже известные положения науки предстанут перед вами в новом свете.

УДК 510.2
ББК 22.1

ISBN 978-5-17-983359-8

© Литвак Н. В., Кечеджан А. Г., 2019
© ООО «Издательство АСТ», 2019

Введение

Мой френд, Пифагор!



Алла: «Почему я не стала математиком»



Нелли: «Не говорите себе „нет“»



Зачем нужен синус

Математика — это не то, что вы думаете



Систематическая ошибка выжившего



Ноль критики



Как устроена эта книга



Благодарности

Мой френд, Пифагор!

Эта книга родилась из эксперимента. Летом 2017 года профессор математики Нелли Литвак и креативный продюсер Алла Кечеджан, вероятно, первые в мире начали обучать взрослых «гуманитариев» математике «с нуля» через социальные сети. Мы пишем слово «гуманитарий» в кавычках, потому что, как вы скоро увидите, мы не согласны с разделением людей на «технарей» и «гуманитариев» и не верим в существование исключительно «гуманитарных» мозгов.

Нелли и Алла познакомились совершенно случайно через «Фейсбук». Через два дня после виртуального знакомства Алла в аэропорту Шереметьево читала новую книгу «Кому нужна математика?»¹, которую Нелли написала в соавторстве с известным математиком Андреем Райгородским. Алла читала, пропуская все формулы, и думала о том, сколько лет пройдет, прежде чем она поймет, как составлять уравнения, находить расстояние между рядами нулей и единиц и тому подобное.

К тому моменту Алла уже создала несколько групп в «Фейсбуке». Теперь ей пришла в голову новая мысль: «А ты можешь научить меня математике? — спросила она

¹ Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2017.

Нелли. — Вот так, через „Фейсбук“. Ну, не только меня. У меня уже есть еще пара желающих...»

Еще год назад Нелли отнеслась бы к этой идее скептически. «Фейсбук» — это не доска и не учебник. Но так случилось, что незадолго до знакомства с Аллой она прочитала две книги, которые ее вдохновили.

В книге «Математика в огне»¹ (Burn Math Class: And Reinvent Mathematics for Yourself) молодой автор Джейсон Уилкс рассказывает, как ненавидел математику в школе. Уже в университете он совершенно случайно наткнулся на книгу по матанализу, заинтересовался, прослушал курс и... закончил университет с дипломом математика, причем лучшим в потоке! В книге с молодежным энтузиазмом он обрушивает лавы гнева на школьную программу и объясняет математику с нуля, «в противоположном порядке»: сначала площадь прямоугольника, потом теорема Пифагора. Зато потом сразу теория относительно-сти Эйнштейна и матанализ!

Еще большее впечатление на Нелли произвела книга профессора Стэнфордского университета Джо Боулера «Математическое мышление. Книга для родителей и учителей»² (Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential Through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching). Боулер пишет о том, что в математике важно обсуждать, работать в команде и делиться информацией друг с другом.

Где еще обсуждать и делиться информацией, как не в соцсетях? И благодаря Уилксу понятно, с чего начать: с площади прямоугольника и теоремы Пифагора!

Через неделю после знакомства Нелли и Алла создали в «Фейсбуке» группу «Математика — великая

¹ Джейсон Уилкс. Математика в огне. — Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2017.

² Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2017.

и ужасная!» Еще через неделю первые участники группы, «безнадежные гуманитарии», сами доказали теорему Пифагора. За месяц к группе присоединилась тысяча участников. Через год группа разрослась до восьми тысяч и продолжает расти.

Алла не перестает удивляться, что в математике всё связано и не так уж сложно. А Нелли поражается огромному количеству мыслей, статей, вопросов, шуток, видео, которые находят и публикуют «гуманитарии»! Она сама узнала много нового. Вернувшись на работу к студентам-математикам, Нелли и им стала преподавать по-другому: снизила темп, стала задавать больше вопросов и больше рассказывать, как математические теории работают на практике.

Исходя из собственного опыта, мы надеемся, что наша книга будет интересна и полезна и тем, кто знает и любит математику, и тем, кто хочет попытаться ее понять.

Алла: «Почему я не стала математиком»

Помните ли вы свои самые первые уроки математики? Когда вы выписывали аккуратно строчки с цифрами 1, 2, 3? Это было сразу после палочек и крючочков. Уже тогда с самого начала математика была важнее. На уроках русского — всего лишь палочки и крючочки. На математике же — ЧИСЛО. В моем классе у каждого была коробочка со счетными палочками — до массового внедрения калькуляторов оставалось еще много лет, а компьютеры тогда занимали целую комнату.

Слова «задача» и «решение» нужно было писать без ошибок, красиво рисовать фигурные скобки, не тереть плюс ластиком до дыр, чтобы получить минус.

Всё шло более-менее неплохо, пока учитель мог на карандашах объяснить, на сколько у Маши конфет больше,

чем у Пети. А потом что-то сломалось. В учебниках стало меньше картинок. Никто не объяснил, что время — это четвертое измерение. А ведь объяснить было проще простого. Чтобы он не пришел в кино, а она в аптеку, надо знать не только место встречи, но и время встречи! Вы прекрасно знаете, что расстояние зависит от времени. В 46 лет, благодаря Нелли, я научилась обозначать это с помощью функции: $S(t)$.

Но разве будут детям говорить о свиданиях? Нам говорили о бездушных поездах и самолетах, которые должны прибыть в какое-то время в какое-то место. А я всё задавала странные для математики вопросы: какого цвета поезд; как называется город, из которого он выехал; как зовут пассажиров. Мне говорили, что такого поезда в жизни не существует, а выехал он из пункта А и движется в пункт Б.

— Если ничего не существует, то зачем мне математика? — растерянно спрашивала я.

— Тебе она и не нужна, пиши свои сочинения, а к математике у тебя никаких способностей нет.

И вот я всю жизнь писала статьи, брала интервью, в том числе у гениев, например, у писателя-фантаста Артура Кларка в 2001 году при запуске капсулы времени в космос. Любовь к писательству позволяла практически «в одни руки» издавать еженедельную 16-полосную газету и обеспечивать контентом одновременно 21 группу в соцсетях.

Говорят, что математику надо учить в детстве, а потом — безнадега. Однако я считаю, что всё происходит вовремя. Когда я была маленькой, не было даже калькуляторов, не говоря уже о компьютерах, которые рисуют многомерные графики. К тому же не было никакой возможности задавать вопросы профессору математики онлайн. А сейчас всё это есть. И оказывается, во мне не умер математик. Прислушайтесь к себе, я уверена, что он жив и в вас.

Нелли: «Не говорите себе „нет“»

Мой дедушка в своё время потратил целое лето, чтобы научить меня кататься на велосипеде. Мне повезло с его ангельским терпением, другой бы давно бросил. Даже научившись с огромным трудом, я долго боялась ездить быстро и боялась ездить по асфальту, предпочитала проселочные дороги.

Мне легко давалась математика. Но многое другое давалось с большим трудом. Баланс и моторика были чуждыми для меня понятиями. В старших классах я не могла перепрыгнуть планку высотой 70 см, а волейбол сдала на 4 только благодаря помощи доброй одноклассницы-волейболистки.

В 42 года я научилась кататься на велосипеде, не держась руками за руль. В моей юности никто не поверил бы, что это возможно. Поэтому не надо говорить, что вы «боитесь формул», что у вас «ступор», что «зубы сводит». Если я могу отпустить руки от руля, то вы в состоянии освоить математику.

Одна из заповедей в нашей семье: «Не говори себе „нет“!» Математического гена не существует. Математику, как и велосипед, в состоянии осилить любой человек. Я готова вам помогать. Я верю в вас. И я такая же терпеливая, как мой дедушка.

Зачем нужен синус

Когда вышла книга Нелли Литвак и Андрея Райгородского «Кому нужна математика?», Нелли приехала в Москву, чтобы прочитать несколько публичных лекций.

Лекции, как и сама книга, были в основном о приложениях математики в современных цифровых технологиях. Но очень скоро Нелли заметила, что слушателей

интересует совершенно другая постановка вопроса: почему нужно мучиться в школе с синусами и логарифмами? кому и зачем это надо? зачем изучать эти абстракции, кроме знаменитого «структурирования мозгов», которого можно достичь и другими способами?

Вопрос «зачем мне математика?» вполне понятный и естественный. Математика — это наука об идеальных объектах. Например, математик может изобразить дорогу в виде линии, а деревья вдоль дороги в виде точек. Всем очевидно, что дерево это не точка и точкой никогда не будет. Поэтому создается впечатление, что математика имеет мало отношения к жизни. Но это впечатление довольно узкое, неполное и, по сути, ошибочное.

Дедушка Нелли, физик Виталий Анатольевич Зверев, — физик. Его научным руководителем был замечательный ученый Габриэль Семенович Горелик. Горелик всегда подчеркивал, что именно то, что математика абстрагируется от реальной сути вещей, и есть очень важная и основная сила математики. Математика позволяет решить конкретную физическую задачу, но при этом делает это так, что это решение справедливо для целого ряда других задач, относящихся к другим разделам физики, и не только физики, а и, например, медицины. Вся научная деятельность Горелика была сосредоточена на этой сильной стороне математики.

Математик изображает дерево в виде точки и изучает точки на площади. Математику точки на плоскости интересны сами по себе. Они такие идеальные, что мы можем выяснить про них очень много. Например, если предположить, что точки разбросаны случайным образом независимо друг от друга, то мы можем подсчитать, с какой вероятностью на любом пространстве площади S образуется «плешь» без единой точки. А потом та же модель

применима к жилому району, где точка — это дом, куда должна приехать скорая помощь.

Математика играет очень важную роль, потому что идеальные математические объекты описывают наш мир и связи в нем. Эти связи могут быть самые неожиданные. Например, в этой книге мы увидим, как стоимость хранения контейнеров на складе связана с площадью треугольника. И, конечно, мы разберемся, зачем нам нужны синус и косинус!

Математика — это не то, что вы думаете

В книге Джо Боулер «Математическое мышление» поражает простая мысль: школьная математика зачастую совсем не похожа на математику как науку.

Что мы представляем себе, когда говорим о школьной математике? Школьник в полном одиночестве зубрит формулы, чтобы потом стандартным способом получить правильный ответ — тот, что написан в конце учебника. Правильно? В общем, да. Так нас и учат.

Только парадокс в том, что профессиональные математики так никогда не работают! Когда математики решают задачи, они пользуются интуицией, рисуют, ошибаются, спорят, подходят к задаче с разных сторон, перерывают кучу материалов, обсуждают со всеми подряд.

Математики никогда не стремятся запомнить формулы наизусть. Запоминать формулы вообще не имеет смысла, особенно если не понимаешь их значения. Говорят, это сам Эйнштейн сказал: «Никогда не заучивайте то, что можно найти в книге». А сейчас и подавно любую формулу можно найти в Интернете. К вопросу о вреде зубрежки мы еще вернемся в главе 11 «Зачем синусу окружность».

Как видите, школьная математическая подготовка и живая научная практика радикально отличаются друг от друга! В результате выпускники школы не имеют ни малейшего представления о том, что такое математика, как она развивается и чем занимается.

В школе под «математическими способностями» часто понимают скорость решения задач и хорошую память. Большинство коллег Нелли, математиков, подтвердят, что ни то ни другое не так уж важно для развития математической мысли. Математика — это наука о связях, которые описывают законы и явления реального мира. И для понимания этих связей совсем не нужно зубрить формулы наизусть. В книге мы не делаем особого упора на терминологию и вычисления. Наша задача перестать бояться и увидеть смысл.

Систематическая ошибка выжившего

Известный математик Джордан Элленберг начинает свой бестселлер «Как не ошибаться»¹ (How Not to Be Wrong: The Power of Mathematical Thinking) знаменитой историей про математика Абрахама Вальда.

Во время Второй мировой войны перед военными встал вопрос, как укрепить самолеты. Броню невозможно добавить повсюду, потому что самолет станет слишком тяжелым. Какие участки особенно важно прикрыть? Естественно, стали смотреть на пробоины вернувшихся самолетов. Казалось, укреплять броню нужно там, где пробоин больше.

Однако Вальд предложил делать прямо наоборот! Почему? Он рассуждал очень просто. Мы видим пробоины

¹ Джордан Элленберг. Как не ошибаться: Сила математического мышления. — Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2017.

только тех самолетов, которые вернулись на базу. Если они вернулись, значит, пробоина не была критичной. Самолеты с пробитым двигателем просто не возвращаются. Критических пробоин мы не видим. Вывод? Нужно укреплять именно непробитые места.

Интуитивная тенденция судить по вернувшимся самолетам называется «систематическая ошибка выжившего». Она часто появляется в разных контекстах. Мы не всегда ее узнаем и в результате приходим к неверным выводам.

Например, мы часто слушаем советы успешных людей: работай больше, ставь цели, не сдавайся. Наверное, успешные люди так и делают. Но мы не знаем, сколько людей поступают точно так же и успеха при этом не достигают. Возможно, если взять всех людей, то картина сложится совсем другая. Например, как пишет Малькольм Гладуэлл в книге «Гении и аутсайдеры»¹ (Outliers: The story of succes), очень многое зависит просто от везения!

Мы рискнем предположить, что в систему преподавания математики тоже проникла «ошибка выжившего». Возможно, не все с нами согласятся, поэтому мы объясним, что именно мы имеем в виду.

Профессиональные преподаватели-математики исходят из того, как их учили и какие методы оказались для них самыми яркими и действенными. Они правы, что эта система дала миру великих математиков. Но только в терминах «ошибки выжившего» все математики — это «выжившие самолеты». И, к сожалению, не все самолеты вернулись на базу. Многие получили пробоину в самый двигатель и печать на всю жизнь: «Тебе это не дано».

¹ Малькольм Гладуэлл. Гении и аутсайдеры. Почему одним все, а другим ничего? — Москва: Манн, Иванов и Фербер, 2012.

Нелли иногда в шутку называет Аллу «самолетом с пробитым двигателем». В этой книге мы постараемся объяснить математику через истории, вопросы, связи, иллюстрации.

Барбара Оакли¹, которая освоила математику во взрослом возрасте после службы в армии и стала профессором-инженером, говорит, что творческий, многоплановый подход — самый эффективный при изучении математики и в образовании вообще. Мы верим, что это и есть то самое «непробитое» место, где нужно укреплять броню!

Ноль критики

Один из главных принципов, которому мы следуем при обучении «гуманитариев» математике с нуля, очень простой, хотя для многих и неожиданный:

Категорически нельзя никого критиковать! НИКОГО!

Интересно, что в нашей группе в «Фейсбуке» правило «ноль критики» оказалось на удивление сложным. Мы получили тонну критики за то, что запретили критику! Тем не менее мы настаиваем на своем.

Почему мы обе против критики? Потому что критика неприятна. Математика и без того многих пугает. Если человек берется за трудное дело, которого всегда боялся, то он достоин только похвалы, восхищения и долгих продолжительных аплодисментов! И совершенно не достоин никаких неприятных комментариев, пусть даже и математически верных.

¹ Профессор математики из Оклэндского университета (США) и автор научно-популярных книг. — *Прим. ред.*

Особенно нельзя критиковать за ошибки. Когда человек делает ошибки? Когда пытается сделать что-то новое и трудное. Математики делают море ошибок, прежде чем что-то получить. Даже на конференциях об этом рассказывают! В точных науках в статьях не принято критиковать других ученых. Когда ученые пытаются получить сложные результаты, то ошибку сделать очень просто. Здесь, как и везде, не ошибается только тот, кто ничего не делает.

При изучении математики ошибки — это нормально и даже хорошо! Джо Боулер в своей книге пишет, что когда мы делаем ошибку, то наш мозг растет, связи между нейронами развиваются и укрепляются. Интересно, что это происходит, даже если мы ошибку не осознали и не исправили! Зато когда мы даем правильные ответы, то активность и развитие мозга намного меньше. Боулер убеждена, что ошибки очень полезны, что за них нужно хвалить и искать в них рациональное зерно.

Мы очень просим читателей придерживаться нашего правила. Если при вас кто-то делает ошибку, то, пожалуйста, воздержитесь от критики! Лучше спросите: «А почему так?» Возможно, человек решает задачу каким-то своим способом, и его ответ вас удивит! Именно так начались многие разговоры Нелли и Аллы, которые привели к более интересным и понятным объяснениям по каждой теме, в каждой главе.

Принцип «ноль критики» распространяется и на самокритику. Постарайтесь избегать мыслей типа «это выше моих способностей», «меня пугают формулы» и так далее. Сегодня пугают, завтра не будут пугать. Не надо ставить на себя всякие штампы.

Наша цель — развитие и понимание, а не правильные ответы. Правильные ответы давно известны, а путь

к ним — индивидуальный и каждый раз новый. В данном случае путешествие важнее, чем пункт назначения. Критика — это палка в колеса.

Как устроена эта книга

Наша книга — не учебник. Мы не претендуем на полноту изложения. Мы лишь изложили свой собственный новый взгляд на математику, родившийся из взаимодействия гуманитария и математика.

Наша книга посвящена элементарной школьной математике, но изложение сильно отличается от школьных учебников. Мы попытались показать неразрывную связь между разными темами. А главное — рассказать, откуда все это взялось и как это связано с окружающим миром — от плитуса и плитки на полу комнаты до вращения спутника и биения сердца. Мы надеемся, что любой читатель поймет основную часть материала, и при этом даже эксперты найдут для себя что-то новое.

Ниже в таблице темы глав. Клеточки закрашены серым, если главы связаны друг с другом.

Как видите, глава 1 принципиальна для всей книги. Дело не только в самой формуле площади прямоугольника. В этой главе мы подробно обсуждаем, как рассуждать с помощью изменения масштаба. Это рассуждение нам понадобится во многих главах, даже если формула площади прямоугольника там напрямую не используется. Что касается алгебры (раскрытие скобок, квадратные уравнения), то здесь связь с площадью прямоугольника абсолютно прямая и естественная, она возникает из геометрической интерпретации и очень помогает придать формулам смысл. Прочитайте эти главы и убедитесь сами!

| Главы | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |
|--|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|
| 1. Прямоугольник с точки зрения здравого смысла | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| 2. С кем расстался треугольник | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| 3. В скобках и за скобками | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| 4. Самый узкий на свете дом | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| 5. Новая мода на пифагоровы штаны | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| 6. Зачем математикам пятьсот первое доказательство теоремы Пифагора? | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| 7. Как нарисовать квадрат в квадратном уравнении | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| 8. Спутник Пифагора | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| 9. «Круглое число» | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| 10. Эксперимент с пирогом и апельсином | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| 11. Зачем синусу окружность | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |
| 12. На волне синусоиды | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ | ■ |

В книге мы даем задания и разбираем решения. Задания — это не просто примеры, которые надо решить. Мы

объясняем, чем интересно это задание, как задания связаны между собой и как подступиться к решению.

Добавим, что если вы честно хотите учиться математике, то очень важно самим выполнять задания и разбираться до конца. Нет такого волшебного способа объяснить математику, чтобы из одного этого объяснения всё стало понятно! Математику невозможно выучить без собственных усилий. Если «математического гена» не существует, то долгие часы, которые математики тратят на освоение предмета, — вполне реальны. Лучшие математики часто не самые «талантливые» (что бы это ни значило), а те, кто работали больше всех. Если вы готовы проявить интерес и сделать усилие, то у вас все получится!

В этой книге мы увидим только маленькую часть необъятной математики. Но мы постараемся приоткрыть дверь в настоящую, живую математику, которая с помощью абстрактных понятий рассказывает о красоте, стройности и сложном устройстве нашего реального мира. Мы надеемся, что наша книга поможет вам увидеть математику именно такой — доступной и прекрасной!

Благодарности

Своим возвращением к математике и победой над страхом перед числами и формулами Алла и другие «гуманитарии» обязаны нескольким активным участникам группы «Математика — великая и ужасная»:

- Инна Ярославская — доктор физико-математических наук из США;
- Максим Янченко — математик, физик, программист и музыкант из Сингапура;
- Ирина Турбина — преподаватель высшей математики московского вуза;
- Алексей Черемхин — программист и физик;

- Виктория Ляшенко — математик, доцент;
- Светлана Колосова — продюсер;
- Римма Лещинская — математик из Иерусалима.

Кто-то учил, кто-то делился интересным материалом, кто-то поддерживал наш энтузиазм. Всё это было очень важно для нас и нашего проекта. Огромное спасибо!

Мы благодарим тысячи неравнодушных участников группы, которые и сейчас, когда эта книга закончена, продолжают создавать контент, писать комментарии и решать задачи только потому, что любят знания.

Мы благодарим издательство АСТ и нашего дорогого редактора Кирилла Игнатьева, с которым нам очень повезло. Он увидел в нашей затее перспективы, будучи стопроцентным «гуманитарием». Читая рукопись, он сам неожиданно увлекся математикой, и это для нас одновременно высокая оценка и большой подарок.

Отдельные слова благодарностей нашим семьям.

Папа Нелли, Владимир Антонец и дедушка Нелли, Виталий Анатольевич, оба ученые-физики, стали нашими первыми читателями. Некоторые части книги основаны на их материале. Это сделало книгу ярче и интереснее. Огромное спасибо за ваши знания, поддержку и энтузиазм!

Мы познакомились случайно на странице мамы Нелли, известного бизнес-коуча Нины Зверевой, в «Фейсбуке». Спасибо ей за эту счастливую случайность, за поддержку нашего проекта и за то, что она вдохновляла и вдохновляет Нелли на написание новых книг!

Мама Аллы Тамара Леонтьевна, у которой техническое образование, до сих пор не верит, что Алла, всё детство удиравшая от задач, как от огня, так увлеклась математикой, что пишет книгу.

Дочери Аллы, Юля и Женя, смирились, что в их доме поселилась «Великая и Ужасная Математика». Они по-

могали Алле снимать видео, придумывали задачки и защищали своей любовью от критики и самокритики.

Старшая дочь Нелли, Наталия, своими организаторскими талантами освободила Нелли много часов для написания книги и была готова слушать и обсуждать главы вслух. Муж Нелли Пранаб и младшая дочка Пиали за год привыкли к тому, что на любом листочке бумаги немедленно появлялись круги и треугольники. Они тепло улыбались, когда Нелли часами фанатично печатала на языке, который они не могут прочитать.

Спасибо, родные, мы вас очень любим!

Глава 1
**Прямоугольник
с точки зрения здорового
смысла**

Длина на ширину



Подсчет кирпичей



Как математики изобретают формулы



Площадь прямоугольника, исходя из здравого смысла



Дайте слово другой стороне



Формула площади прямоугольника



Единицы измерения



Формула для сотки



Почему мы начали с площади прямоугольника



Число в квадрате



Число в кубе

Длина на ширину

Начнем сразу с задания. Их в книге будет много, поэтому давайте договоримся, как их решать.

Можно (и часто очень полезно):

- начать с самых простых примеров;
- рисовать;
- пользоваться Интернетом и обсуждать с кем угодно;
- ошибаться;
- хвалить себя и друг друга за интересные мысли, даже если они не «идеально правильные».

Нельзя (или, по меньшей мере, неконструктивно):

- сомневаться в своих способностях и критиковать себя,
- критиковать других людей, которым вы предложили решить задания.

ЗАДАНИЕ 1.1. Посмотрите на прямоугольник на рис. 1.1.

В школе мы проходили, что площадь прямоугольника — это «длина-умноженная-на-ширину». Мы не будем принимать это на веру! Объясните, почему этот способ вычисления площади имеет смысл, какой бы ни были



Рисунок 1.1

длина и ширина. Объясните своими словами. Говорите, что придет в голову, и попробуйте найти как можно больше объяснений. Удачи!

Теперь давайте посмотрим на возможные объяснения.

Подсчет кирпичей

Представим, что прямоугольник выложен из кирпичей. Каждый кирпич — это один квадратный сантиметр. Допустим, что наш прямоугольник длиной 5 см и шириной 3 см. Его легко нарисовать на листочке в клеточку. Чтобы узнать, сколько всего кирпичей в прямоугольнике, нужно посчитать, сколько кирпичей в каждом ряду (длина) и умножить на количество рядов (ширина).

$$\text{длина} \times \text{ширина} = \text{площадь}$$

Это совершенно логичное и правильное объяснение. Если длина, например, равна 5 см, а ширина равна 3 см, то так и есть: $3 \times 5 = 15 \text{ см}^2$.

Сразу возникает следующий вопрос. Как быть, если длины сторон любые, не обязательно целые? Например, длина составляет 5,5 см, а ширина — 3,2 см. Естественно, формула для площади остается верна: $5,5 \times 3,2 = 17,6 \text{ см}^2$.

Но как это объяснить? Можно, конечно, представить себе, что в ряду 5,5 кирпичика, а рядов 3,2. Но это уже не так красиво и не так убедительно.

В математике принято смотреть на одну и ту же формулу с самых разных сторон. Есть ли у знаменитой формулы «длина-на-ширину» какая-нибудь интересная, совсем другая интерпретация? Оказывается, есть! С этой интерпретации начинается книга Джейсона Уилкса «Математика в огне».

Площадь прямоугольника — настолько простой объект, что новая интерпретация вряд ли сильно вас удивит. У вас может создаться впечатление, что это снова «подсчет кирпичей», только другими словами. Чтобы вам не показалось, что мы переливаем из пустого в порожнее, мы сначала коротко расскажем о том, как математики «изобретают» формулы.

Как математики изобретают формулы

Математика описывает реальный мир с помощью идеальных объектов. Идеальных в том смысле, что в мире нет абсолютно прямых линий и ни одна формула не выполняется с абсолютной точностью.

Даже если вы примените формулу площади прямоугольника для подсчета площади прямоугольной комнаты, все равно будет небольшая погрешность. Все, кто въезжал в новую квартиру, знают, что линия на стыке между стеной и полом далеко не идеальная прямая. Тем не менее, легче всего считать эту линию прямой. В конце концов, она гораздо больше похожа на прямую, чем, скажем, на параболу. И подсчеты окажутся, возможно, не безупречно точные, но достаточно точные, чтобы заказать ковровое покрытие.

Перед математиками часто встает задача описать объект реального мира «формально», то есть с помощью формул. Объекты в природе существуют, а формулы — нет. Как вычислить разницу между двумя статистическими экспериментами? Что такое вероятность? Как измерить количество информации? Для нахождения «правильных» формул используется один и тот же подход, который стал стандартным подходом в математике. И конечно, этот подход можно применить не только к таким сложным объектам, как количество информации, но и к таким простым, как площадь прямоугольника.

В чем же заключается общий подход современной математики к формальному определению объектов реального мира? Чтобы в этом разобраться, не нужно знать ни одной формулы. Фактически подход состоит из двух основных шагов:

1) математики пытаются понять, что собой представляет объект с точки зрения здравого смысла. Допустим, мы хотим определить количество информации в тексте. Тогда, исходя из здравого смысла, слова, которые встречаются часто (например, «или»), должны нести меньше информации, чем более редкие слова (например, «прямоугольник»);

2) после этого математики пытаются найти формальное определение или формулу, которая обладает всеми этими естественными свойствами. Так, например, Клод Шеннон¹ нашел формулу, кото-

¹ Клод Элвуд Шеннон (1916—2001) — американский инженер и математик, основоположник теории информации, применяемой в современных высокотехнологичных системах связи, впервые использовал термин «бит» для определения наименьшей единицы информации в статье «Математическая теория связи» (*A Mathematical Theory of Communication*) в 1948 г. — *Прим. ред.*

рая удовлетворяет «здравым» соображениям о том, что такое «количество информации».

Именно этот подход применяет Уилкс, чтобы «изобрести» формулу площади прямоугольника. И даже если вам покажется, что он «стреляет из пушки по воробьям», на чем же еще продемонстрировать общий подход, как не на самых простых примерах?

Площадь прямоугольника, исходя из здравого смысла

Давайте сначала просто подумаем, что такое площадь. Что мы о ней знаем? По сути, площадь — это размер плоской фигуры, то есть сколько места фигура занимает на плоскости.

Пожалуй, это всё, что мы знаем о площади. Возможно, вам покажется, что это слишком просто, но с точки зрения здравого смысла трудно что-то к этому добавить. И если не торопиться, то можно оценить, как много мы можем сказать о площади, исходя только из этого простого бытового определения.

Во-первых, сразу становится ясно, что площадь не бывает отрицательной. Плоская фигура всегда занимает какое-то место, может даже нулевое место (например, если это точка или прямая), но плоская фигура никогда не может «освободить» место. Отрицательная площадь — это абсурд, который совершенно не соответствует нашим представлениям о реальном мире.

Можно еще что-то к этому добавить? Да, конечно. Например, допустим, что одна фигура нарисована внутри другой, как на рис. 1.2 — треугольник вписан в прямоугольник.

Прямоугольник явно занимает больше места на плоскости, чем вписанный в него треугольник. Значит,

Оглавление

| | |
|--|----|
| Введение | 5 |
| Мой френд, Пифагор! | 7 |
| Алла: «Почему я не стала математиком» | 9 |
| Нелли: «Не говорите себе „нет“» | 11 |
| Зачем нужен синус | 11 |
| Математика — это не то, что вы думаете | 13 |
| Систематическая ошибка выжившего. | 14 |
| Ноль критики | 16 |
| Как устроена эта книга | 18 |
| Благодарности | 20 |

Глава 1. Прямоугольник с точки зрения

| | |
|--|----|
| здорового смысла | 23 |
| Длина на ширину | 25 |
| Подсчет кирпичей | 26 |
| Как математики изобретают формулы | 27 |
| Площадь прямоугольника, исходя из здорового смысла. | 29 |
| Дайте слово другой стороне | 32 |
| Формула площади прямоугольника | 32 |
| Единицы измерения | 34 |
| Формула для сотки | 36 |
| Почему мы начали с площади прямоугольника. | 36 |
| Число в квадрате | 37 |
| Число в кубе | 38 |

Глава 2. С кем расстался треугольник

| | |
|--|----|
| Треугольник в прямоугольнике | 43 |
| Половина основания на высоту. | 44 |
| Сказка о невидимом прямоугольнике. | 46 |

| | |
|--|-----------|
| Один плюс два плюс три... и так далее | 47 |
| Склады и треугольники | 51 |
| Тупоугольный треугольник | 52 |
| Появление и исчезновение b | 53 |
| Птица в объективе | 54 |
| Половина параллелограмма | 56 |
| Скошенный прямоугольник. | 57 |
| Параллелограмм в один квадратный сантиметр | 59 |
| Упражнение на трапеции | 61 |
| Математика в картинках. | 62 |
| Глава 3. В скобках и за скобками | 65 |
| 18×5 | 67 |
| Решение важнее ответа | 68 |
| Устаревшая математика? | 70 |
| Вы уже раскрыли скобки! | 72 |
| Две скобки | 73 |
| Скобки и площади | 74 |
| Умножение по-японски | 75 |
| Не бойтесь писать латинскими буквами! | 77 |
| Две скобки с буквами. | 79 |
| Что означает знак равенства? | 82 |
| a плюс b в квадрате | 84 |
| Игры с умножением | 87 |
| Стихия скобок | 87 |
| Глава 4. Самый узкий на свете дом | 89 |
| Как связать шнурок с прямоугольником? | 91 |
| Математик и нитка | 92 |
| Периметр и площадь | 95 |
| С какого конца веревки думать? | 96 |
| Самая большая площадь. | 97 |
| Где «таблица» в таблице умножения? | 99 |
| Задача для Алисы | 100 |

| | |
|---|------------|
| Самый узкий дом в мире | 102 |
| Сравнение несравнимого? | 104 |
| Растущий квадрат | 106 |
| Ослик бегаёт по кругу | 109 |
| Глава 5. Новая мода на пифагоровы штаны. | 113 |
| Кратчайший путь к теореме Пифагора | 115 |
| Пифагоровы штаны. | 117 |
| Доказательство на песке | 119 |
| Зачем кому-то что-то доказывать? | 120 |
| Пришло время доказать теорему Пифагора!. | 122 |
| Еще одно из многих доказательств | 125 |
| Глава 6. Зачем математикам пятьсот первое доказательство теоремы Пифагора? | 129 |
| Хватит и одного опровержения. | 131 |
| Полукруглый Пифагор | 132 |
| Шляпа в квадрате | 136 |
| Пифагоровы коты. | 138 |
| Чем треугольник лучше кота | 139 |
| Глава 7. Как нарисовать квадрат в квадратном уравнении | 143 |
| Алла и математики | 145 |
| Уравнение из древнего учебника. | 146 |
| Снова $(a + b)^2$ | 148 |
| Полет по параболе | 150 |
| Почему все предметы, запущенные по прямой, летят по параболе. | 151 |
| Почему мы видим параболы | 153 |
| Склад мячей | 155 |
| Два корня. | 157 |
| Великий и ужасный дискриминант | 159 |
| Визитная карточка квадратного уравнения | 160 |

| | |
|---|-----|
| Глава 8. Спутник Пифагора | 165 |
| Дедушка Нелли | 167 |
| Полет по касательной | 168 |
| Далеко ли улетел спутник? | 169 |
| Пифагор против силы тяжести | 172 |
| «Необоснованная эффективность математики» | 173 |
| Вот она, орбитальная скорость | 175 |
| Почему сегодня в вас не врезался спутник | 179 |
| Почему спутники запускают не вверх, а в бок | 181 |
| Вселенная Пифагора | 182 |
| | |
| Глава 9. «Круглое» число | 183 |
| Мышка на экваторе | 185 |
| Длина окружности, деленная на диаметр | 187 |
| Искусство сдаться | 189 |
| Нижняя и верхняя границы | 192 |
| Бесконечность после запятой | 196 |
| Экватор и обруч | 198 |
| Линейная зависимость | 200 |
| Дежавю | 201 |
| Запуск Системы 2 | 203 |
| | |
| Глава 10. Эксперимент с пирогом и апельсином | 205 |
| Лучший способ понять математику | 207 |
| Снова л?. | 208 |
| Общая площадь Пирога | 210 |
| День числа л | 213 |
| Плох тот круг, который не мечтает стать сферой | 214 |
| Шляпная коробка Архимеда | 216 |
| Огурцы и помидоры | 219 |
| Снова апельсин | 220 |
| Голландские поля | 221 |
| Страсти вокруг сферы | 225 |

| | |
|---|------------|
| Слабость «сильных» и сила «слабых» | 227 |
| Что сделала Нелли, прочитав книгу Джо Боулер «Математическое мышление» | 229 |
| Глава 11. Зачем синусу окружность | 231 |
| История о вращении | 233 |
| Вот они, синус и косинус | 233 |
| Что может и не может произойти на единичной окружности | 237 |
| Полухорда | 238 |
| Угол 30 градусов | 239 |
| Синус в треугольнике | 240 |
| Не зубрите формулы! | 242 |
| Пифагор на окружности | 245 |
| Серый кардинал тригонометрии | 247 |
| Обозначим рыбку через x | 248 |
| Синус и косинус угла в 45 градусов | 249 |
| Глава 12. На волне синусоиды | 251 |
| Чудо-муха на окружности | 253 |
| Волна синусоиды | 255 |
| Почему синусоида — не окружность? | 257 |
| Синус в нашем сердце | 258 |
| Заключение. Теорема о математических способностях | 261 |



МАТЕМАТИКА *для* БЕЗНАДЕЖНЫХ ГУМАНИТАРИЕВ



Нелли Литвак –
профессор математики из Нидерландов, автор
научных статей по прикладной теории вероятностей
и нескольких научно-популярных книг,
финалист премии «Просветитель»
и популяризатор науки.



Алла Кечеджан –
креативный продюсер,
журналист и автор нескольких проектов
по обучению взрослых через социальные сети.

Если вы считаете, что люди делятся на всемогущих математиков и никчемных гуманитариев, вы серьезно ошибаетесь. Эта книга докажет вам, что не существует никаких мифических способностей к математике или особенного математического гена. В книге вы встретите, возможно, еще знакомый со школы материал с заданиями, но не дайте форме себя обмануть – это вовсе не учебник! Объяснения элементарных на первый взгляд заданий покажут, насколько сложны бывают даже самые обыденные вещи.

Если вы считаете себя гуманитарием, вы узнаете, какие математические законы связывают паркет на полу комнаты с вращением спутника и биением сердца.

Если вы считаете себя математиком, вы узнаете, как избежать систематической ошибки выжившего, и сможете по-новому посмотреть на уже известные положения науки.

$\pi = 3,141592653589793238462464338327950288\dots$



книги для любого настроения здесь



ИЗДАТЕЛЬСКАЯ ГРУППА АСТ

www.ast.ru | www.book24.ru

vk.com/izdatelstvoast
instagram.com/izdatelstvoast
facebook.com/izdatelstvoast
ok.ru/izdatelstvoast

ISBN 978-5-17-983359-8



9 785179 833598