

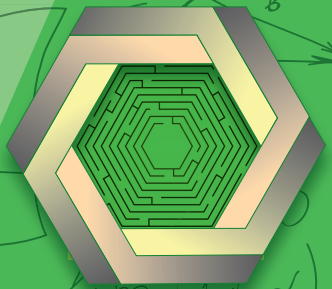
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ

УПРАЖНЕНИЯ

Собрание
математических
ГОЛОВЛОМОК

ДИК ХЕСС

 Лаборатория
ЗНАНИИ



ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ

DICK HESS

The Population **EXPLOSION**

and Other
Mathematical
Puzzles

 World Scientific

NEW JERSEY • LONDON • SINGAPORE • BEIJING • SHANGHAI • HONG KONG • TAPEI • CHENNAI

ДИК ХЕСС

Интеллектуальные УПРАЖНЕНИЯ

Собрание
математических
головоломок

Перевод с английского
Н. А. Шиховой



Москва
Лаборатория знаний

УДК 51-028.41+794

ББК 22.1я92

X40

Хесс Д.

X40 Интеллектуальные упражнения. Собрание математических головоломок / Д. Хесс ; пер. с англ. Н. А. Шиховой. — М. : Лаборатория знаний, 2019. — 192 с. : ил.
ISBN 978-5-00101-194-1

В книге собраны уникальные авторские головоломки на различные темы: логические, физические, геометрические, вероятностные, числовые и пр. Ко всем головоломкам приведены ответы, ко многим — решения.

Для всех любителей математики.

УДК 51-028.41+794

ББК 22.1я92

12+

Научно-популярное издание

Хесс Дик

**ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЕ УПРАЖНЕНИЯ.
СОБРАНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ГОЛОВОЛОМОК**

Ведущий редактор *М. С. Стригунова*. Художник *В. А. Прокудин*
Технический редактор *Т. Ю. Федорова*. Корректор *И. Н. Панкова*
Оригинал-макет подготовлен *О. Г. Лапко* в пакете $\text{L}^{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}2_{\epsilon}$

Подписано в печать 27.11.18. Формат 60×90/16.

Усл. печ. л. 12,00. Заказ

Издательство «Лаборатория знаний»

125167, Москва, проезд Аэропорта, д. 3

Телефон: (499) 157-5272, e-mail: info@pilotLZ.ru,

<http://www.pilotLZ.ru>

ISBN 978-5-00101-194-1

Copyright © 2016 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
Все права защищены. Настоящее издание, как и его любая часть, не могут быть воспроизведены в любой форме или любыми средствами, электронными или механическими, включая фотокопирование, запись или любые системы хранения или извлечения информации, известные в настоящее время или которые будут изобретены, без письменного разрешения Издателя. Русский перевод публикуется с разрешения World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Сингапур

Copyright © 2016 by World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.
All rights reserved. This book, or parts thereof, may not be reproduced in any form or by any means, electronic or mechanical, including photocopying, recording or any information storage and retrieval system now known or to be invented, without written permission from the Publisher.

Russian translation arranged with World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., Singapore.

© Лаборатория знаний, 2019

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
-------------------	---

Задачи

Глава 1. Озорные головоломки	8
1. Загадочное слово	8
2. Тайна зарплаты	8
3. Родственники	8
4. Фишки в коробке	9
5. Мощная подача	9
6. Демографический взрыв	9
7. Цепная линия	10
Глава 2. Геометрические головоломки	11
8. Геологоразведка на Ригеле	11
9. Соединяя точки	11
10. Прямоугольные треугольники	12
11. Усеченный многогранник	12
12. Красивые коробочки	13
13. Почти прямоугольное озеро	14
14. Растроенный ромб	15
15. Разрезание квадрата	15
Глава 3. Цифровые головоломки	16
16. Всецифровые подарки	16
17. Вариант sudoku	16
18. Всецифровые суммы	16
19. Чет и нечет	18
20. Странная целостность	18
21. Десятизначное число	18
Глава 4. Логические головоломки	19
22. Дележ пирога	19
23. Побег из темницы	19
24. Логика и геометрия	20
25. Али Баба и 10 разбойников	20
26. Головоломки на годовщину свадьбы	21

Глава 5. Головоломные вероятности	23
27. Сюрприз для игрока	23
28. Игра Тензи	23
29. Маленькое бинго	23
30. Обычное бинго	24
31. Честная дуэль	25
32. Золотой сет в теннисе	25
33. Рулетка на автобус	25
34. Цветные шарики	26
35. Игра «Бродилка»	27
Глава 6. Аналитические головоломки	28
36. Спешка в аэропорту	28
37. Что это было?	28
38. Мышиные бега	28
39. Навещаем родственников	28
40. Логи и рифмы	29
41. Многочлены—1	29
42. Многочлены—2	29
43. Каскад простых пифагоровых троек	29
44. Разведение несушек	30
45. Дилемма рыцаря	30
46. Наименее равнобедренный треугольник	31
47. Почувствуй себя доктором	32
Глава 7. Физические головоломки	33
48. Лодка с сюрпризом	33
49. Равновесие	33
50. Подвешенный стержень	38
51. Падающие лестницы	38
Глава 8. Головоломки с трапециями	40
Равнобедренные трапеции с целыми сторонами, вписанные в окружность	40
52. Минимальные РТЦС	40
53. Наименьшая окружность	41
54. Простые РТЦС	41
55. Плоские РТЦС	41
56. Вытянутые РТЦС	41
57. Почти квадратные РТЦС	42
58. РТЦС с целыми высотами	42

Равнобедренные трапеции с целыми сторонами, вписанные в квадраты	42
59. Наименьшая РТЦС в квадрате	42
60. РТЦС, у которой $a = s$	43
61. РТЦС, у которой $a = c$	43
62. РТЦС, у которой $x = u$	43
63. РТЦС, у которой $b/s > 14$	43
64. РТЦС, у которой $b/s < 0,8, 0,75$ и $0,71$	44
65. РТЦС наименьшей площади	44
66. Наибольший квадрат	44
67. Неединственные решения	44
68. Наименьшие квадраты	45
Глава 9. Джипы в пустыне	46
69. Дорога в один конец на одном джипе	46
70. Дорога туда и обратно на одном джипе	47
71. Дорога в один конец с джипом-помощником	47
72. Дорога в один конец на двух джипах	48
73. Дорога туда и обратно с джипом-помощником	48
74. Дорога туда и обратно на двух джипах	49
75. Два джипа и две станции заправки	50
76. Дорога туда и обратно на трех джипах	51
Глава 10. Головоломки с цифрами	52
Трехцифровки	52
77. Из цифр 0, 1 и 2 в возрастающем порядке сделай число	52
78. Из цифр 1, 2 и 3 в возрастающем порядке сделай число	53
79. Из цифр 2, 3 и 4 в возрастающем порядке сделай число	53
80. Из цифр 3, 4 и 5 в возрастающем порядке сделай число	53
81. Из цифр 4, 5 и 6 в возрастающем порядке сделай число	54
82. Из цифр 5, 6 и 7 в возрастающем порядке сделай число	54
83. Из цифр 6, 7 и 8 в возрастающем порядке сделай число	54
84. Из цифр 7, 8 и 9 в возрастающем порядке сделай число	54
85. Из цифр 0, 2 и 4 в возрастающем порядке сделай число	55

86. Из цифр 1, 3 и 5 в возрастающем порядке сделай число	55
87. Из цифр 2, 4 и 6 в возрастающем порядке сделай число	55
88. Из цифр 3, 5 и 7 в возрастающем порядке сделай число	55
89. Из цифр 4, 6 и 8 в возрастающем порядке сделай число	56
90. Из цифр 5, 7 и 9 в возрастающем порядке сделай число	56
91. Из цифр 0, 3 и 6 в возрастающем порядке сделай число	56
92. Из цифр 1, 4 и 7 в возрастающем порядке сделай число	56
93. Из цифр 2, 5 и 8 в возрастающем порядке сделай число	57
94. Из цифр 3, 6 и 9 в возрастающем порядке сделай число	57
95. Из цифр 0, 4 и 8 в возрастающем порядке сделай число	57
96. Из цифр 1, 5 и 9 в возрастающем порядке сделай число	57
97. Из цифр 1, 2 и 3 в убывающем порядке сделай число	58
98. Из цифр 1, 2 и 4 в убывающем порядке сделай число	58
99. Из цифр 1, 2 и 5 в убывающем порядке сделай число	58
100. Из цифр 3, 5 и 6 в убывающем порядке сделай число	58
101. Из цифр 3, 6 и 7 в убывающем порядке сделай число	59
102. Из цифр 3, 6 и 8 в убывающем порядке сделай число	59
103. Из цифр 3, 4 и 7 в убывающем порядке сделай число	59
104. Из цифр 3, 4 и 5 в убывающем порядке сделай число	59
105. Из цифр 3, 5 и 8 в убывающем порядке сделай число	60
106. Из цифр 3, 7 и 8 в убывающем порядке сделай число	60
107. Из цифр 3, 4 и 8 в убывающем порядке сделай число	60
108. Из цифр 3, 4 и 6 в убывающем порядке сделай число	60
109. Из цифр 4, 7 и 9 в убывающем порядке сделай число	61
110. Из цифр 4, 8 и 9 в убывающем порядке сделай число	61
111. Из цифр 3, 4 и 9 в убывающем порядке сделай число	61
Трехцифровки — средний уровень	61
112. Одиозные одиночки (По одному решению в каждой задачке)	62
113. Пагубные парочки (По два решения в каждой задачке)	63
114. Трешетные трио (По три решения в каждой задачке)	63

115. Навязчивые несколько (От 4 до 7 решений в каждой задачке)	64
116. Добейся максимума	65

Решения

Глава 1. Озорные головоломки	68
1. Загадочное слово	68
2. Тайна зарплаты	68
3. Родственники	68
4. Фишки в коробке	69
5. Мощная подача	69
6. Демографический взрыв	69
7. Цепная линия	70
Глава 2. Геометрические головоломки	71
8. Геологоразведка на Ригеле	71
9. Соединяя точки	74
10. Прямоугольные треугольники	74
11. Усеченный многогранник	75
12. Красивые коробочки	76
13. Почти прямоугольное озеро	77
14. Растроенный ромб	78
15. Разрезание квадрата	79
Глава 3. Цифровые головоломки	80
16. Всецифровые подарки	80
17. Вариант sudoku	80
18. Всецифровые суммы	80
19. Чет и нечет	81
20. Странная целостность	81
21. Десятизначное число	81
Глава 4. Логические головоломки	82
22. Дележ пирога	82
23. Побег из темницы	83
24. Логика и геометрия	84
25. Али Баба и 10 разбойников	84
26. Головоломки на годовщину свадьбы	86

Глава 5. Головоломные вероятности	88
27. Сюрприз для игрока	88
28. Игра Тензи	88
29. Маленькое бинго	89
30. Обычное бинго	90
31. Честная дуэль	91
32. Золотой сет в теннисе	91
33. Рулетка на автобус	92
34. Цветные шарики	93
35. Игра «Бродилка»	95
Глава 6. Аналитические головоломки	97
36. Спешка в аэропорту	97
37. Что это было?	97
38. Мышиные бега	97
39. Навешаем родственников	98
40. Логи и рифмы	99
41. Многочлены—1	99
42. Многочлены—2	100
43. Каскад простых пифагоровых троек	101
44. Разведение несущек	102
45. Дилемма рыцаря	102
46. Наименее равнобедренный треугольник	103
47. Почувствуй себя доктором	104
Глава 7. Физические головоломки	120
48. Лодка с сюрпризом	120
49. Равновесие	120
50. Подвешенный стержень	120
51. Падающие лестницы	122
Глава 8. Головоломки с трапециями	125
52. Минимальные РТЦС	125
53. Наименьшая окружность	125
54. Простые РТЦС	125
55. Плоские РТЦС	126
56. Вытянутые РТЦС	126
57. Почти квадратные РТЦС	126
58. РТЦС с целыми высотами	127
59. Наименьшая РТЦС в квадрате	128
60. РТЦС, у которой $a = s$	129
61. РТЦС, у которой $a = c$	129
62. РТЦС, у которой $x = u$	130
63. РТЦС, у которой $b/s > 14$	131

64. РТЦС, у которой $b/s < 0,8, 0,75$ и $0,71$	132
65. РТЦС наименьшей площади	133
66. Наибольший квадрат	134
67. Неединственные решения	135
68. Наименьшие квадраты	136
Глава 9. Джи́пы в пустыне	139
69. Дорога в один конец на одном джипе	139
70. Дорога туда и обратно на одном джипе	141
71. Дорога в один конец с джипом-помощником	143
72. Дорога в один конец на двух джипах	145
73. Дорога туда и обратно с джипом-помощником	148
74. Дорога туда и обратно на двух джипах	151
75. Два джипа и две станции заправки	156
76. Дорога туда и обратно на трех джипах	160
Глава 10. Головоломки с цифрами	163
77. Из цифр 0, 1 и 2 в возрастающем порядке сделай число	163
78. Из цифр 1, 2 и 3 в возрастающем порядке сделай число	163
79. Из цифр 2, 3 и 4 в возрастающем порядке сделай число	163
80. Из цифр 3, 4 и 5 в возрастающем порядке сделай число	164
81. Из цифр 4, 5 и 6 в возрастающем порядке сделай число	165
82. Из цифр 5, 6 и 7 в возрастающем порядке сделай число	166
83. Из цифр 6, 7 и 8 в возрастающем порядке сделай число	166
84. Из цифр 7, 8 и 9 в возрастающем порядке сделай число	167
85. Из цифр 0, 2 и 4 в возрастающем порядке сделай число	167
86. Из цифр 1, 3 и 5 в возрастающем порядке сделай число	167
87. Из цифр 2, 4 и 6 в возрастающем порядке сделай число	168
88. Из цифр 3, 5 и 7 в возрастающем порядке сделай число	168
89. Из цифр 4, 6 и 8 в возрастающем порядке сделай число	169

90. Из цифр 5, 7 и 9 в возрастающем порядке сделай число	170
91. Из цифр 0, 3 и 6 в возрастающем порядке сделай число	170
92. Из цифр 1, 4 и 7 в возрастающем порядке сделай число	170
93. Из цифр 2, 5 и 8 в возрастающем порядке сделай число	171
94. Из цифр 3, 6 и 9 в возрастающем порядке сделай число	171
95. Из цифр 0, 4 и 8 в возрастающем порядке сделай число	172
96. Из цифр 1, 5 и 9 в возрастающем порядке сделай число	172
97. Из цифр 1, 2 и 3 в убывающем порядке сделай число	172
98. Из цифр 1, 2 и 4 в убывающем порядке сделай число	173
99. Из цифр 1, 2 и 5 в убывающем порядке сделай число	173
100. Из цифр 3, 5 и 6 в убывающем порядке сделай число	174
101. Из цифр 3, 6 и 7 в убывающем порядке сделай число	174
102. Из цифр 3, 6 и 8 в убывающем порядке сделай число	175
103. Из цифр 3, 4 и 7 в убывающем порядке сделай число	175
104. Из цифр 3, 4 и 5 в убывающем порядке сделай число	176
105. Из цифр 3, 5 и 8 в убывающем порядке сделай число	176
106. Из цифр 3, 7 и 8 в убывающем порядке сделай число	177
107. Из цифр 3, 4 и 8 в убывающем порядке сделай число	177
108. Из цифр 3, 4 и 6 в убывающем порядке сделай число	177
109. Из цифр 4, 7 и 9 в убывающем порядке сделай число	178
110. Из цифр 4, 8 и 9 в убывающем порядке сделай число	178
111. Из цифр 3, 4 и 9 в убывающем порядке сделай число	179
112. Одиозные одиночки	179
113. Пагубные парочки	180
114. Трепетные трио	181
115. Навязчивые несколько	182
116. Добейся максимума	183
Авторы головоломок	184

*Памяти моего любимого брата
Роберта (Боба) А. Хесса
(9 ноября 1940—2 марта 2015)*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга — продолжение моих книг *Mental Gymnastics: Recreational Mathematical Puzzles* и *Golf on the Moon*, выпущенных издательством *Dover Publishing Co.* в 2011 и 2014 годах. Головоломки в этих книгах — для развлечения и удовольствия, этим удовольствием можно поделиться с друзьями. Решение головоломок развивает математическое мышление, которое включает в себя логику, озарение, владение геометрическими, аналитическими и физическими понятиями. Головоломки могут не поддаться сразу, тогда потребуется проявить настойчивость. Для решения большинства головоломок хватит карандаша и бумаги, но иногда придется прибегнуть к помощи компьютера, чтобы провести исследование или перебор вариантов или чтобы вычислить ответ. Остроумие тоже не помешает — будь к этому готов!

Идеи для головоломок я часто черпаю в бумажных изданиях или интернет-ресурсах, где есть разделы с задачами или головоломками. Среди них *CruX Mathematicorum with Mathematical Mayhem*, *Journal of Recreational Mathematics*, *Pi Mu Epsilon Journal*, раздел головоломок в журнале *Technology Review*, *Ponder This* и *Puzzle Up*. Еще один источник — устные сообщения и предложения от любителей головоломок. Я признателен всем энтузиастам, которые делятся своими новыми задачками и размышляют над моими.

Дик Хесс

ЗАДАЧИ

ГЛАВА 1. ОЗОРНЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ

1. Загадочное слово

Это слово содержит 8 букв, иногда 6 букв, чаще 4 буквы, но постоянно содержит 9 букв. Что это за слово? Решение неединственно.

2. Тайна зарплаты

Пятеро товарищей обедали вместе, и разговор зашел о зарплате. Они решили подсчитать среднюю зарплату всех пятерых, но никто не хотел дать сведения о своей. У каждого есть карандаш и бумага, никто не помогает им в этой задаче. Как им решить проблему?

3. Родственники

- (a) Стоят рядом два человека. Один указывает на другого и говорит: «У меня нет сыновей и дочерей, однако отец этого человека — сын моего отца». Кем друг другу приходятся эти двое?
- (b) Зять Алексея — отец моего дяди Петра. Мы с Алексеем кровные родственники. Кем он мне доводится?
- (c) У меня нет дочерей, племянниц и племянников, но зато есть знакомый адвокат. Свекор адвоката — сын моей свекрови.
 - (i) Догадайся, я женщина или мужчина?
 - (ii) А адвокат?
 - (iii) Кем мы с адвокатом друг другу приходимся?

4. Фишки в коробке

Всего лишь за пять ходов передвинь фишку T в нижний правый угол коробки (рис. 1). Ходом считается перемещение одной фишки по любому пути.

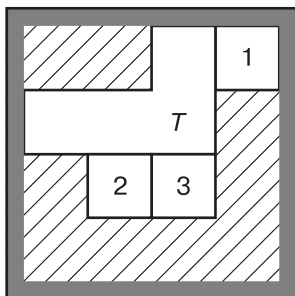


Рис. 1

5. Мощная подача

Теннисист ударяет по мячу, и тот летит с огромной скоростью. Если ее выразить в километрах в час, то число будет ровно на 100 больше скорости в милях в час. Какова же скорость мяча? (1 миля = 1,6 км.)

6. Демографический взрыв

В 2015 году население Земли составляло 7,3 млрд человек. Будем считать, что средний житель Земли занимает $0,063 \text{ м}^3$, так что общий объем, занимаемый населением, составлял $0,4599 \text{ км}^3$.

- В первом приближении Земля представляет собой шар радиусом 6371 км. Равномерно распределим объем, занимаемый населением планеты, по поверхности этого шара. Какой толщины получится слой?
- Сейчас население растет в геометрической прогрессии, увеличиваясь на 1,14% в год. Предположим, что такая скорость роста сохранится и в будущем. Через какое время население вырастет так, что толщина слоя составит один метр? Сколько людей будет жить на Земле к тому моменту?

- (с) Пусть население Земли так и растет в геометрической прогрессии — на 1,14% в год. Через сколько лет человечество будет занимать сферу, радиус которой увеличивается со скоростью света ($= 9,4605284 \times 10^{12}$ км/год)? Сколько людей тогда будет жить на Земле? Релятивистскими эффектами пренебречь.

7. Цепная линия

К верхушкам двух вертикальных десятиметровых столбов прикреплена 15-метровая цепь. Она провисает, и в нижней точке расстояние от цепи до земли 2,5 м. Чему равно расстояние d между столбами?

ГЛАВА 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ГОЛОВОЛОМКИ

8. Геологоразведка на Ригеле

Планета Ригель IV замечательна тем, что представляет собой абсолютно гладкую сферу радиусом 4000 миль. Как и Земля, она вращается вокруг своей оси. Как и на Земле, положение любой точки на Ригеле IV задается двумя координатами — широтой и долготой. Три геолога направили доклады в штаб разведки.

- (а) Геолог А: «Из своего лагеря я отправился строго на север и прошел 1 милю в этом направлении, никуда не сворачивая. Затем я прошел 1 милю на восток. Я перекусил, а затем отправился опять на север и прошел 1 милю в этом направлении, никуда не сворачивая. Наконец, я прошел еще милю на запад и оказался в своем лагере». Где может располагаться лагерь геолога А?
- (b) Геолог В: «Выйдя из своего лагеря, я прошел 1 милю на север, а затем 1 милю на восток. После этого прошел 1 милю на юг и, наконец, 1 милю на запад; после этого я оказался в собственном лагере». Где может располагаться лагерь геолога В?
- (с) Геолог С: «Выйдя из своего лагеря, я прошел 1 милю на север, а затем 1 милю на восток. После этого прошел 1 милю на юг и, наконец, 1 милю на запад; после этого я оказался в точке, наиболее удаленной от моего лагеря среди всех точек, достижимых при описанных условиях». Где может располагаться лагерь геолога С и как далеко от лагеря оказался геолог в конце маршрута?

9. Соединяя точки

Отрезок прямой, соединяющий любые две точки из шести, изображенных на рис. 2, называется звеном. Сколько

звеньев можно расположить так, чтобы не образовалось ни одного треугольника с вершинами в отмеченных точках?

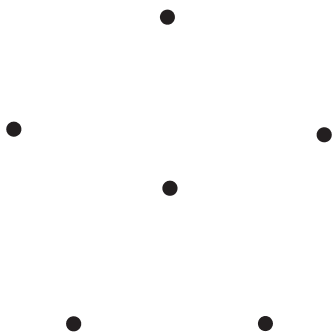


Рис. 2

10. Прямоугольные треугольники

На рис. 3 отрезок $AE = 111$, а длины остальных отрезков неизвестны. Найди величину $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DE^2$.

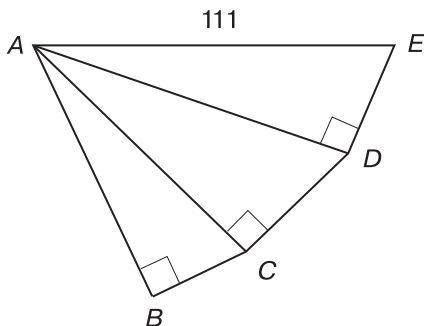


Рис. 3

11. Усеченный многогранник

У многогранника M_1 аккуратно отрезали все вершины, проведя плоские сечения. Отрезали совсем по чуть-чуть, так что у сечений нет общих точек. Получился новый

многогранник M_2 , у которого Γ граней, B вершин и P ребер.

- (a) Одно из чисел Γ , B и P равно 11. Каким может быть многогранник M_1 (два варианта)?
- (b) Одно из чисел Γ , B и P равно 13. Каким может быть многогранник M_1 (четыре варианта)?

12. Красивые коробочки

- (a) Аня сказала своей подруге Ирине: «У меня есть прямоугольная коробочка без крышки, все ее измерения — целые числа. Я обклеила коробку цветной бумагой изнутри и снаружи, всего 10 граней. Оказалось, что площадь использованной цветной бумаги в квадратных единицах равна объему коробочки в кубических единицах. Более того, объем моей коробочки максимально возможный при этих условиях». Ирина ответила: «Я сделала то же самое, причем у моей коробочки при тех же условиях наименьший возможный объем». Каковы размеры обеих коробок?
- (b) Боря сказал Кате: «У меня есть прямоугольная коробочка без крышки, все размеры коробочки — целые числа. Я обклеил 5 сторон коробочки снаружи цветной бумагой и заметил, что площадь израсходованной бумаги в квадратных единицах равна объему коробочки в кубических единицах. К тому же, хотя моя коробочка не имеет форму куба, ее объем — точный куб». Катя ответила: «Я поступила так же как ты, и у меня тоже площадь израсходованной бумаги в квадратных единицах равна объему коробочки в кубических единицах. При этом объем моей коробочки вдвое меньше объема твоей». Каковы размеры обеих коробок?
- (c) Вера сказала своему другу Леше: «У меня есть прямоугольная коробочка с целыми измерениями. Я обклеила цветной бумагой все шесть граней коробочки изнутри и снаружи. Оказалось, что площадь израсходованной бумаги в квадратных единицах равна объему коробочки

в кубических единицах. К тому же наибольшее измерение моей коробки выражается нечетным числом». Леша ответил Вере: «У меня есть коробка с такими же свойствами, но по объему она меньше твоей». Каковы размеры обеих коробок?

- (d) Гриша сказал своему другу Мише: «У меня есть прямоугольная коробка с целыми измерениями. Я обклеил цветной бумагой все шесть граней коробки снаружи. Оказалось, что площадь израсходованной бумаги в квадратных единицах равна объему коробки в кубических единицах. К тому же все измерения моей коробки выражаются разными числами». Миша ответил: «У меня есть коробка с такими же свойствами, но по объему она вдвое меньше твоей». Каковы размеры обеих коробок?

13. Почти прямоугольное озеро

На рис. 4 изображено озеро $ABCDEFGG$, берег которого — почти прямоугольник, за исключением участка DE . Пусть A_1 — площадь фигуры $DEFG$, A_2 — площадь фигуры $BCDE$, а A_3 — площадь клина ADE . Вырази A_3 через A_1 и A_2

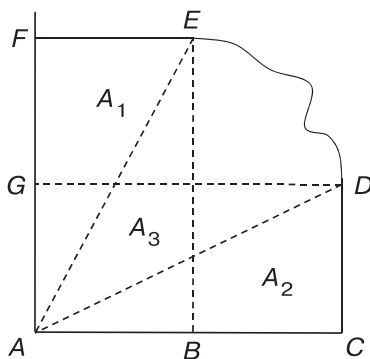


Рис. 4

14. Растроенный ромб

На рис. 5 изображен ромб с углами 120° и 60° . Раздели его на три подобные друг другу части. Размеры частей могут не быть одинаковыми. Найди шесть решений.

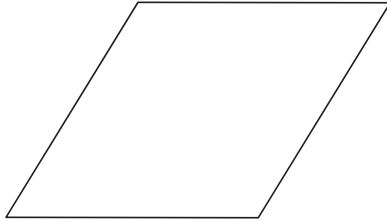


Рис. 5

15. Разрезание квадрата

Разбей квадрат на прямоугольники с целыми длинами сторон, отношения которых равны 3 к 1. Прямоугольники не должны быть все одного размера, а их число должно быть как можно меньше.

ГЛАВА 3. ЦИФРОВЫЕ ГОЛОВОЛОМКИ

16. Всецифровые подарки

К Рождеству я купил подарки друзьям, стоимость каждого подарка в долларах выражалась точным квадратом. Когда я записал все цены на листе бумаги, то оказалось, что каждая цифра от 1 до 9 встретилась ровно по одному разу, причем мои расходы были минимально возможными при данных условиях. Сколько всего было подарков и сколько я заплатил за них?

17. Вариант sudoku

Расставь в клетках таблицы на рис. 6 числа от 1 до 5 так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце все числа были разными и чтобы все суммы в выделенных областях были различны.

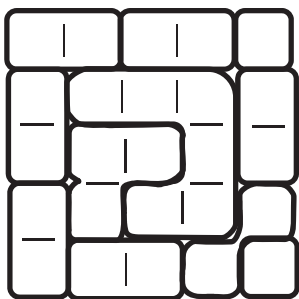


Рис. 6

18. Всецифровые суммы

- (а) Обрати внимание, что в левой части равенства $\frac{87}{93} + \frac{42}{651} = 1$ все цифры от 1 до 9 встречаются ровно

по одному разу. Подбери такие натуральные числа a , b , c , d , чтобы это свойство выполнялось для равенства $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, причем:

- (i) сумма $a + b + c + d$ была бы наибольшей;
- (ii) сумма $a + b + c + d$ была бы наименьшей;
- (iii) частное $\frac{a}{b}$ было бы наименьшим.

(b) В левой части равенства $\frac{70}{96} + \frac{143}{528} = 1$ каждая из цифр от 0 до 9 встречается ровно по одному разу. Подбери такие натуральные числа a , b , c , d , чтобы это свойство выполнялось для равенства $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 1$, причем:

- (i) сумма $a + b + c + d$ была бы наибольшей;
- (ii) сумма $a + b + c + d$ была бы наименьшей;
- (iii) частное $\frac{a}{b}$ было бы наименьшим.

(c) В левой части равенства $\frac{4}{68} + \frac{297}{153} = 2$ все цифры от 1 до 9 встречаются ровно по одному разу. Подбери такие натуральные числа a , b , c , d , чтобы это свойство выполнялось для равенства $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 2$, причем:

- (i) сумма $a + b + c + d$ была бы наибольшей;
- (ii) сумма $a + b + c + d$ была бы наименьшей;
- (iii) частное $\frac{a}{b}$ было бы наименьшим.

(d) В равенстве $\frac{12}{93} + \frac{870}{465} = 2$ все цифры от 0 до 9 встречаются ровно по одному разу. Подбери такие натуральные числа a , b , c , d , чтобы это свойство выполнялось для равенства $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = 2$, причем:

- (i) сумма $a + b + c + d$ была бы наибольшей;
- (ii) сумма $a + b + c + d$ была бы наименьшей;
- (iii) частное $\frac{a}{b}$ было бы наименьшим.

19. Чет и нечет

Пусть m — пятизначное число, записанное пятью разными нечетными цифрами 1, 3, 5, 7, 9 в некотором порядке; а n — пятизначное число, записанное пятью разными четными цифрами 2, 4, 6, 8, 0 в некотором порядке. Может ли n быть кратно m ?

20. Странная целостность

У меня есть две разные цифры a и b , и я рассматриваю целые числа, ближайšie к выражениям $^{-0,a}\sqrt{0,b}$ и $^{-0,b}\sqrt{0,a}$.¹ Оказывается, это два разных целых числа, оба они больше 10, оба записаны одними и теми же цифрами, но в разном порядке.

Чему равны a и b ?

21. Десятизначное число

Десятизначное число записано десятью разными цифрами 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 в некотором порядке. Цифры с левого края по одной вычеркивают, и получаются числа, которые делятся соответственно на 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2 и 1.

- (а) Мое число наибольшее из всех, что обладают этим свойством. Что это за число?
- (б) Мое число наименьшее из всех, что обладают этим свойством. Что это за число?

¹ Обозначения следуют оригиналу и будут встречаться в дальнейшем. Имеются в виду числа $(0,b)^{-1/0,a}$ и $(0,a)^{-1/0,b}$. — Прим. ред.

[. . .]

Интеллектуальные упражнения

Собрание математических головоломок

Хотите с пользой провести свой досуг и получить истинное удовольствие от решения интереснейших головоломок? У вас есть такая возможность! Новая книга известного коллекционера математических диковинок Дика Хесса «Интеллектуальные упражнения» бросает вызов как новичку, так и опытному любителю умственной гимнастики. В сборник вошли задачи разной степени сложности: от простых до очень замысловатых. Не расстраивайтесь, если некоторые головоломки не получится решить с первого раза! Проявите настойчивость, смекалку и терпение.

Книга предназначена для всех любителей математики старше 12 лет. Может служить прекрасным пособием для дополнительных занятий в рамках школьного или университетского курса математики, а также организации работы в профильных кружках.



Дик Хесс – выпускник Калифорнийского университета в Беркли, имеет докторскую степень по физике, специалист в области аэрокосмической промышленности. Более десяти лет собирает и публикует математические головоломки.