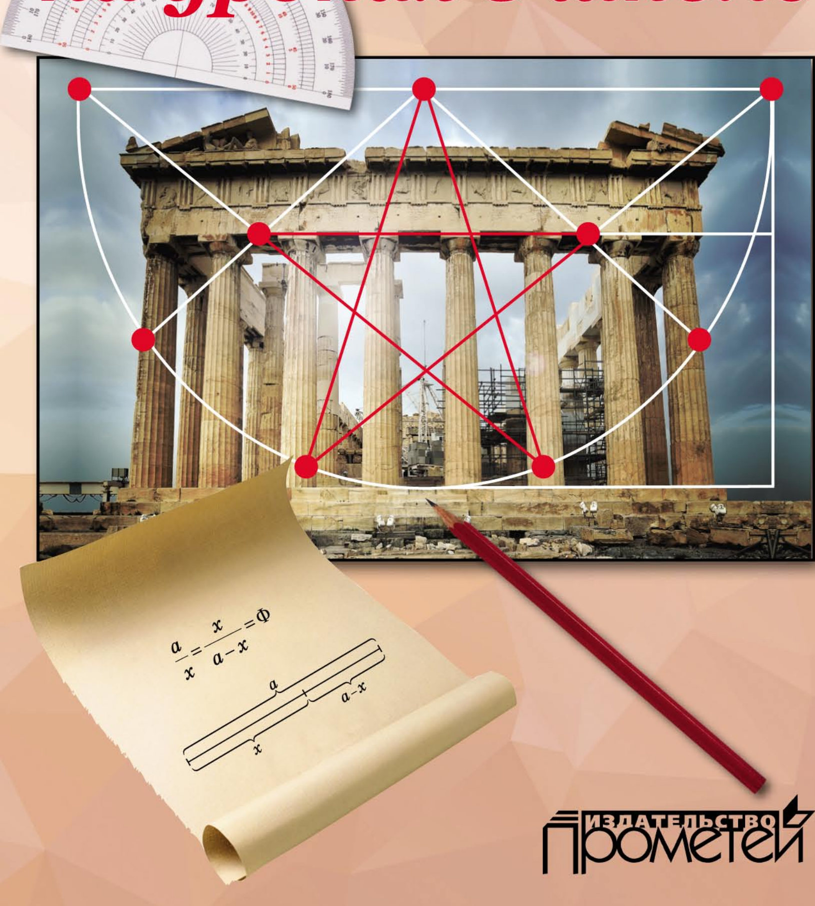
А.Г. Хармац

МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО МИРА

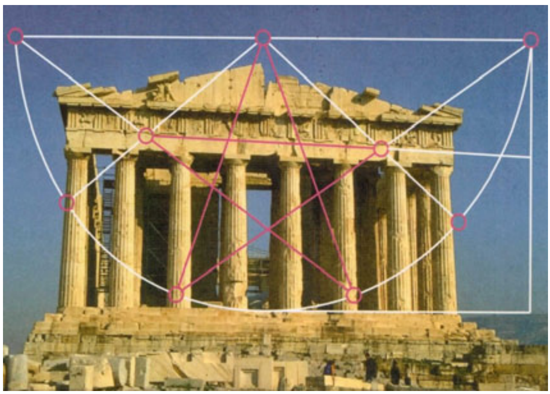
на уроках в школе



ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ

А.Г. ХАРМАЦ

МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО МИРА
на уроках в школе



Пифагор: Всё прекрасно благодаря числу.

ИЗДАТЕЛЬСТВО ПРОМЕТЕЙ

Москва, 2019

УДК 51 (09)
ББК 22.1г
Х214

Хармац А.Г.

Х214 **Математика Древнего мира на уроках в школе**: книга об истории развития математики, обращенная к широкому кругу читателей. Она содержит материалы к лекциям и практическим занятиям для студентов физико-математических факультетов педагогических вузов. Будет также полезна и учителям математики, и учащимся средней школы / А.Г. Хармац. – М.: Прометей, 2019. – 398 с.

ISBN 978-5-907100-62-6

Данная книга напоминает об основных этапах развития математики. Но главное внимание уделено становлению математики в эпоху Древнего мира. Математика рассматривается как неотъемлемая часть общечеловеческой истории на фоне развития мировой культуры.

В книге содержится много выдержек из работ классиков математики, что дает возможность почувствовать их стиль изложения, особенности математического языка. Читатель познакомится как с теоретическим материалом, написанным в доступной форме, так и с практическим, подразумевающим разбор задач. Среди них выделяются *исторические* (их более 160, и взяты они из произведений классиков) и *учебные* (их 83, они предложены автором для выработки навыков решения задач рассматриваемого типа). Кроме того, часть задач рекомендуется для самостоятельной работы. Приводятся эмоциональные вставки, забавные случаи и легенды о науке и ее творцах.

В конце книги в ***приложении 1*** содержится перечень некоторых разделов школьной программы с указанием номеров задач данного пособия, которые могут быть использованы при изучении соответствующей темы.

В ***приложении 2*** даётся словарь некоторых часто упоминаемых математических терминов с указанием их происхожденииия и значения.

Издание адресуется студентам физико-математических факультетов педагогических вузов, преподавателям, читающим этот курс, учителям, старшеклассникам, а также всем, кто интересуется историей математики.

Свои замечания и советы сообщите автору по адресу:
harmatsanatoliy@outlook.com

ISBN 978-5-907100-62-6

Светлой памяти замечательного Человека, моего незабвенного Учителя, привившего мне любовь к изучению истории математики, – профессора И.К. АНДРОНОВА – посвящаю эту работу.

А.Г. Хармац

МАТЕМАТИКА И ИСКУССТВО –
в лекциях И.К. АНДРОНОВА – они всегда шли рядом

* * *

Пифагор, VI век до н.э.: **Все вещи суть числа.**

* * *

"Важнейшие виды прекрасного – это слаженность, соразмерность и определённость, математика больше всего выявляет именно их".

Аристотель, IV в. до н.э., древнегреческий философ.

* * *

"В истории черпаем мы мудрость, в поэзии – остроумие, в математике – принципиальность".

Ф. Бэкон (1561–1626), английский философ.

* * *

"Нельзя быть математиком, не будучи одновременно и поэтом в душе".

К. Вейерштрасс (1815–1897), немецкий математик.

* * *

"Творчество математика в такой же степени есть создание *прекрасного*, как творчество живописца или поэта, – совокупность идей, подобно совокупности красок или слов, должна обладать внутренней гармонией. Красота есть первый пробный камень для математической идеи; в мире нет места уродливой математике".

Г.Харди (1877–1947), английский математик.

* * *

"Математика владеет не только истиной, но и высшей красотой – красотой отточенной и строгой, возвышенно чистой и стремящейся к подлинному совершенству, которое свойственно лишь величайшим образцам искусства".

Б. Рассел (1872–1970), английский философ, математик.

«Всякое обучение становится ярче, богаче от каждого соприкосновения с историей изучаемого предмета».
А. Пуанкаре (1854–1912), французский физик и математик.

Обращение к читателям

1. В процессе работы над данной книгой я старался следовать содержанию, духу и стилю лекций и печатных работ по истории математики моего замечательного Учителя, выдающегося Педагога, неутомимого пропагандиста науки, знатока истории математики и её исследователя, профессора Ивана Козьмича Андронова (1894–1975). Поэтому я часто ссылаюсь на высказывания и на труды незабвенного Ивана Козьмича.

2. При подготовке рукописи использованы материалы к лекциям по истории математики, которые я читал в Псковском государственном педагогическом институте (ПГПИ им. С.М. Кирова) с 1963 по 1967 гг. и в Московском областном педагогическом институте (МОПИ им. Н.К. Крупской, ныне – МГОУ) с 1994 г. по 2010 г.

3. Эта работа адресована вам, дорогие студенты физико-математических факультетов педагогических вузов,– завтрашним школьным учителям. Надеюсь, что она не нанесёт вреда и уже состоявшимся учителям математики, которые достаточно давно прослушали курс истории математики (если он читался в вузе, который они окончили).

4. Возможно, это будет выглядеть не очень скромно, но рискну предположить: данная работа может оказаться полезной и тем преподавателям вуза, которые лишь предполагают приступить к чтению курса истории математики.

5. В ходе своего повествования я пытаюсь через вас, уважаемые студенты и учителя, через ваши головы и ваши сердца говорить с вашими учениками на доступном для них математическом языке, с достаточно подробными выкладками, с использованием соответствующих иллюстраций. Поэтому смею надеяться, что те школьники, которые интересуются историей возникновения и архитектурой математики, с пользой для себя станут читателями этой книги и прикоснутся к цитируемым отрывкам из шедевров, созданных классиками математики.

6. Во многих местах текста даны ссылки на использованную литературу. Например, запись [24, с. 11] означает, что использован материал, имеющийся на 11-й странице книги [24] в прилагаемом списке литературы. Это делается для того, чтобы интересующийся читатель мог лично ознакомиться с более подробным изложением рассматриваемого вопроса в первоисточнике. Запись вида (см. с. 57) означает: «смотри страницу 57 **этой же** книги».

7. В конце разделов даются краткие **выводы** и более развёрнутые **комментарии**. Использование того или другого текста зависит от наличия времени на изучение данного раздела, оно удобно при подготовке к зачётным мероприятиям.

Читая книгу, будем помнить слова Л. Н. Толстого: «*Правильный путь таков: усвой то, что сделали твои предшественники, и иди дальше*».

Успехов вам, дорогие почитатели истории замечательной науки, имя которой – **математика**! *Автор.*

ВВЕДЕНИЕ

1. Как развивалась математика? (Шипы и розы на челе математики)

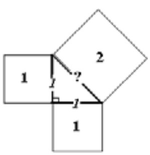
Представьте себе, что с помощью чудесной «машины времени» мы смогли перенестись на 26 веков назад, вглубь истории. В яркий солнечный день на большом белом корабле мы приплыли к берегу, где раскинулась Древняя Греция.

Нас встречает многочисленная масса людей в белых просторных одеждах – туниках. Стоящий впереди высокий седовласый человек приветствует нас движением руки, поднятой вверх. Это великий Пифагор со своими учениками пришёл на пристань, чтобы встретить нас и познакомить со своей родиной.

Он ведёт нас по тенистым аллеям к своему дому. Заходим в большую комнату, перегороженную на две части циновкой, свешивающейся с потолка. В одну из частей комнаты – ту, что более просторная и светлая, проходит Пифагор с небольшим числом своих учеников – пифагорейцев. В другой части помещения остаётся большинство пришедших. Это – «акусматики» («слышу, но не вижу») – те, кто ещё не заслужил права находиться рядом с Учителем и может только слушать (но не видеть!) то, о чём размышляют истинные пифагорейцы.

А между тем за циновкой происходит любопытный разговор. Прислушаемся к нему и мы. Слышится голос молодого человека:

– О, великий Учитель! На прошлой беседе ты открыл нам свою великую теорему о том, что во всяком прямоугольном треугольнике квадрат, построенный на гипотенузе, равновелик сумме квадратов, построенных на его катетах. А ещё раньше ты говорил нам о том, что всё в мире – есть число, что бог управляет миром посредством числа. В частности, это означает, что каждый отрезок управляется некоторым числом – длиной отрезка. Но вот я рисую равнобедренный прямоугольный треугольник с катетами, равными единице длины. Тогда площади квадратов, построенных на этих катетах, равны единице, а квадрат на гипотенузе равен 2. Но тогда – чему же будет равна гипотенуза? Ведь мы не знаем ни одного числа, квадрат которого был бы равен двум. Значит, Учитель, либо неверна твоя теорема, либо ты был неправ, когда утверждал, что всё в мире есть число! Но, может, есть ещё какие-то числа, о которых мы не ведаем?



Услышав сказанное, Пифагор задумался, опустив голову. На несколько минут всё погрузилось в тишину. Наконец, подняв глаза и пощипывая от волнения бороду, великий философ и математик произнёс:

– Да, я знал, что ты – умный человек и достойный мой ученик, прилежно овладевающий знаниями. Но как ты посмел усомниться в словах своего учителя?!

Мы бы с вами сегодня сказали, что в данном случае длина гипотенузы равна иррациональному числу $\sqrt{2}$. Но пифагорейцы не знали иррациональных чисел!

Легенда донесла до нас то, как далее развивались события после описанного разговора. Из неё мы узнаём, что вскоре, в погожий солнечный летний день, Пифагор пригласил своих учеников совершить прогулку на корабле. Но случилось так, что внезапно подул сильный ветер, погода резко испортилась, поднялись высокие волны. Видимо, боги узнали о словах проницательного юноши, который усомнился и в справедливости учения Пифагора, и в том, что всё в мире есть число. Поэтому они обрушили свой гнев на путешественников-пифагорейцев. Корабль стал терять устойчивость и в любой момент мог перевернуться. Для облегчения корабля капитан приказал выбросить в море все бочки, ящики и прочие предметы, находившиеся на судне. Но этого оказалось недостаточно, корабль по-прежнему угрожающе кренился. Надо было кого-то из пассажиров принести в жертву, бросив в морскую пучину. И тут Пифагор рукой указал на того юношу, который посмел возразить ему, своему учителю. Молодого человека схватили и тут же бросили за борт… Этого юношу звали Гиппас. Вместе с его гибелью на многие годы люди лишились замечательной идеи – идеи иррационального числа!

Итак, мы оказались свидетелями величайшей трагедии, сопровождавшей возникновение нового важного понятия в математике. Сегодня, начиная изучать в школе иррациональные числа, ни ученики, ни даже учитель не задумываются о том, на фоне каких драматических событий осуществлялось развитие математики, появлялись новые идеи, теории, разделы.

Образно говоря, мы присутствовали при тяжёлых рòдах новой идеи – идеи несоизмеримости. Современная учебная книга по математике напоминает кондуит (журнал), заполненный в ЗАГСе: «Такая-то теорема была доказана таким-то учёным такой-то страны в таком-то году!». И всё! И – никаких эмоций!

А книга по истории математики – это вроде личного присутствия при рòдах, когда воочию ощущаешь, с каким трудом, подчас – в каких муках рождалось новое слово в математике! Здесь были и человеческие трагедии (Гиппас, Ипатия), и моральные издержки, непонимание со стороны окружающих (Галилео Галилей, Янош Больяи, Н.И. Лобачевский), и противостояние в вопросах приоритета (Н. Тарталья и Д. Кардано, И. Ньютон и Г. Лейбниц, П. Ферма и Р. Декарт). Помним ли мы о том, что глава инквизиции в Испании Томас Торквемада отправил в 1486 году на костёр испанского математика Вальмеса за утверждение, что он нашёл решение уравнения 4-й степени, которое, по мнению инквизитора, по воле бога недоступно человеческому разуму? [24, с. 60]. Авторы большинства учебников – школьных да и вузовских – ни о чём подобном, к сожалению, почти не пишут. В этих книгах всё чётко расставлено по своим местам: § 1, § 2, § 3 и т.д.; внутри каждого параграфа: определение 1.1, теорема 1.1, следствие 1, снова – теорема 1.2 и так далее – до конца параграфа или раздела.

> Однако на самом деле, как писал профессор И.К. Андронов, – развитие математики – это не всегда гладкая дорога, покрытая асфальтом, с которой убраны все бугорки, выбоины и препятствия. Развитие нашей науки – это долгий извилистый путь, иногда с узкими тропинками, крутыми неожиданными поворотами, завалами, ущельями, обрывами, густыми зарослями, сквозь которые приходится продираться, невзирая на ссадины и синяки, как во всяком трудном деле.

Достаточно вспомнить такие печальные факты, как гибель в 415 году выдающейся женщины, греческой учёной Ипатии, мученическую смерть на костре инквизиции Джордано Бруно (1600 г.), судилище над Галилео Галилеем (1632 г.), грязный пасквиль о творчестве гениального нашего соотечественника Н.И. Лобачевского (1834 г.), преследование итальянского математика Н. Тартальи сообщниками его соперника – Д. Кардано… Известно ли нашим учащимся знаменитое письмо венгерского учёного Фаркаша Больяи (Bolyai) своему сыну – Яношу, который вплотную подошёл к созданию неевклидовой геометрии? «*Ради бога, молю тебя, оставь эту материю, страшись её не меньше, нежели чувственных увлечений, потому что и она может лишить тебя всего твоего времени, здоровья, покоя, всего счастья твоей жизни. Этот беспросветный мрак может потопить тысячи ньютоновских башен*».

Одна из важнейших задач курса истории математики – проследить, как в действительности шло развитие математики – одной из самых стройных и логически безупречных наук. Пусть нашим девизом станут слова немецкого философа и математика Г. Лейбница: «*Кто хочет изучить настоящее, не зная прошлого, тот никогда его не поймёт*».

Будем же говорить о прошлом, постигая настоящее, ради прогнозирования будущего!

2. Определение науки истории математики

История математики – это система научных знаний о возникновении, развитии и взаимосвязи математических понятий, теорий и отдельных разделов математики, о движущих силах её развития, о связи математики с реальным миром и другими науками.

3. Цели курса истории математики

3.1. Выявить общие закономерности в развитии математики, увидеть движущие силы этого развития.

Условно можно выделить **внутренние** и **внешние** стимулы, способствующие развитию математики.

1^0. Внутренние – потребности развития математической теории.

Вот некоторые примеры.

1) Известно, что для решения уравнений с одной неизвестной 1-й, 2-й, 3-й и 4-й степеней уже к XVI веку имелись соответствующие формулы. Возникает естественный вопрос: а **можно ли получить формулу для решения уравнений 5-й и более высоких степеней**? В результате длительных исследований этой проблемы было доказано, что никто и никогда для уравнения выше 4-й степени не найдёт формулу, выражающую – с помощью конечного числа радикалов – корни уравнения через его коэффициенты. Заметим, что эта проблема носит чисто **теоретический** характер. Даже если бы такие формулы были найдены, то практически для решения уравнений они вряд ли были бы полезны, так как содержали бы радикалы, точное значение которых было бы неизвестно. Даже решая простое квадратное уравнение $x^2 = 2$, можно записать его решение с помощью формулы $x = \pm\sqrt{2}$. Но так как $\sqrt{2}$ не имеет точного рационального значения, то и точные значения неизвестной x найти невозможно!

Но – главное – **теоретический** интерес к проблеме был удовлетворён! И, кроме того, поиски решения попутно привели к созданию новых понятий и разделов математики (в частности, теории групп).

2) **Попытки доказать 5-й постулат Евклида** (что привело к созданию неевк-

III ЭТАП РАЗВИТИЯ МАТЕМАТИКИ:

ВОЗНИКНОВЕНИЕ И РАЗВИТИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МАТЕМАТИКИ В АНТИЧНОЙ ГРЕЦИИ *(VII в. до н.э. – V в. н.э.)*

Сначала – небольшое предисловие

А теперь мы отправляемся в Древнюю Грецию. Когда мы произносим слово «Греция», наша память тут же оживляет знакомые ещё со школьных лет понятия: «подвиги Геракла», «огонь Прометея», «клятва Гиппократа», «троянский конь», «ахиллесова пята», «марафонская дистанция», поэмы Гомера «Илиада» и «Одиссея»… Вот уже показались обитатели Олимпа – знаменитые Зевс («владыка богов и людей»),его жена Гера, их дочь Афина, бог огня Гефест, повелитель морей Посейдон, покровитель поэзии и музыки Аполлон, любви Афродита... Мы помним многие греческие мифы. И конечно же – чтим олимпийские игры! И всё это – Греция!

Мы очень часто произносим слова «школа», «театр», «гимназия», «музей», родившиеся в Греции. Каждый школьник трепещет перед терминами «аксиома», «теорема», «катет», «гипотенуза», «эллипс», «парабола», «гипербола». Он уже наполовину знает греческий язык! А римляне (продолжатели греческой культуры и употреблявшие латинский язык) породили для нас слова «*декан», «функция», «вектор», «интеграл», «градус»…*

К тому же геометрия – это Греция! Евклид и Архимед, Парфенон и Фидий, Сократ и Аристотель, Аристофан и Эсхил – это тоже Греция!

Так не познакомиться ли нам поближе с историей этой страны, с развитием её культуры и науки? Безусловно, надо это сделать! Едем, нет, даже летим в древнюю Элладу – Древнюю Грецию и Рим!

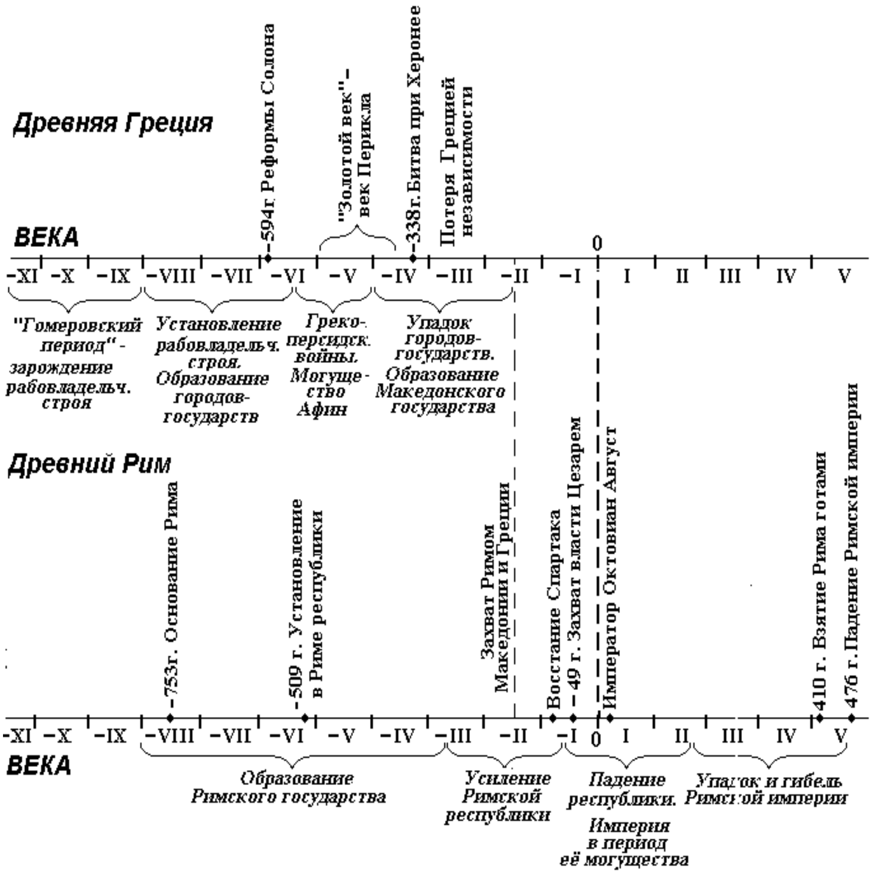
ГЛАВА 1.
ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЭПОХИ

§ 1. ИСТОРИЧЕСКИЕ И СОЦИАЛЬНО-ЭКОНОМИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ В ДРЕВНЕЙ ГРЕЦИИ

1. К концу 2-го тысячелетия до н.э. в эпоху первобытнообщинного строя греки заселяли южную часть Балканского полуострова, островà Эгейского моря, берега Малой Азии. Жили общинами, занимались земледелием и скотоводством.

2. В «гомеровский период» (XI–IX века до н.э.), совершались набеги на земли соседних племён с целью захвата плодородных земель, имущества и пленников, которых не убивали, а обращали в рабов. Однако рабство ещё не имело широкого распространения: основную роль в хозяйстве играли свободные земледельцы.

3. В период VIII–VII веков до н.э. одновременно с развитием ремёсел, земледелия и торговли растёт экономическое неравенство людей. Земля оказывается в руках знати, а бедняки – у них в кабале. Происходит расслоение общества на богатых и бедных, на рабов и рабовладельцев. Это привело к созданию **государства** как средства защиты интересов богатых.



В ранних рабовладельческих **деспотических** государствах, о которых шла речь выше, верховная власть была сосредоточена в руках **одного правителя** и передавалась по наследству. В отличие от этого на Балканах образуются *пóлисы* – города-государства (Афины, Коринф, Милет, Спарта и др.), в которых происходит постепенный переход от **деспотической** формы правления к **демократической**: власть – в руках людей, **избранных** населением на определённый срок.

Но население городов-государств неоднородно. Свободное население делилось на *аристократов* («власть лучших») и простой народ – *демос* (земледельцы, ремесленники). Аристократы стали закабалять земледельцев и обращать их в рабство за долги. Но большинство рабов – это военнопленные и покорённые жители других государств.

4. С VI века до н.э. в греческих городах-государствах *демократия* (власть демоса – народа) набирает силу. Верховная власть в форме *Народных собраний* принадлежала только свободным гражданам. Так, в Афинах в Народном собрании могли участвовать только свободные граждане – мужчины в возрасте от 20 лет, родившиеся от свободных коренных жителей города, независимо от имущественного положения. Народное собрание собиралось 3 раза в месяц. *Большинством голосов* решались вопросы войны и мира, утверждались законы, распределялась казна, избирались государственные служащие – *стратеги* (правители), военачальники, судьи и даже глашатаи. Афиняне считали, что гражданин, не участвующий в общественной жизни, бесполезен для государства.

Такова была греческая рабовладельческая демократия.

5. В период VIII–VI веков до н.э. возникают греческие колонии – земли на берегах юга Италии, Сицилии, Средиземного, Чёрного и Азовского морей, запада Малой Азии. Туда стекаются люди, бегущие от угнетения: люди, желающие заниматься земледелием, и ремесленники, сбывающие свои товары.

6. В конце VI века до н.э. растёт противостояние демоса и аристократов. Опасаясь восстаний, аристократы были вынуждены пойти на реформы. В 594 г. до н.э. в Афинах проводятся *реформы Солона*, по которым: 1)отменялись долги мелких земледельцев; 2) запрещалось за долги продавать людей в рабство; 3) власть получали не знатные, а богатые.

7. В VI веке до н.э. персы стали завоёвывать греческие города в Малой Азии. Когда население восстало против захватчиков, Афины поддержали обороняющихся (в частности, жителей города Милет). Но персы устояли, а в 490 году до н.э. выступили против Греции. Началась 30-летняя греко-персидская война, шедшая с переменным успехом. Афины сумели объединить усилия греческих городов и, разбив персидские войска в Марафонской долине и в Саламинском проливе, вышли победителями в войне. Это привело к возвышению Афин, укреплению их лидирующего положения в Греции. Они объединили около 200 городов-государств в Морской союз и возглавили его. Город Афины быстро богатеет, строится, развивает хозяйство и торговлю, поддерживает культуру.

Укрепляется греческая *демократия* – власть «свободных». Однако рабы, женщины и пришельцы из других мест остаются бесправными!

> О бесправном положении рабов говорит следующее наставление хозяина надсмотрщику:
>
> *«Плетьми бей, души, дави,…, жги, дери, крути суставы, можешь в ноздри уксус лить, класть кирпичи на живот, можешь всё»* [20, с. 139].

8. V-й век до н.э. – это «**золотой век**» в истории Афин, время наивысшего могущества Афин, наибольшей демократизации политического строя. Это – **век Перикла** – правителя, при котором особенно активно шло развитие культуры. В период своего правления (445–430 гг. до н.э.) Перикл укрепляет армию и флот, поощряет развитие ремёсел и торговли, что давало заработок неимущим афинянам и доходы государству. Он покровительствует развитию искусства и науки. Афины украшаются белоснежными храмами, дворцами, скульптурой.

> Об Афинах современники говорили: «Да ты – чурбан, если не видел Афины! Если видел и не восторгался – ты осёл; а если добровольно их покинул, то ты – верблюд!» [27, с. 106].

1) При помощи удвоения числа сторон вычисляются периметры правильных *описанных* многоугольников P_6, P_{12}, P_{24}, P_{48}, P_{96}, приближающихся к длине окружности, но больших её («сверху»). При этом получается, что $l < P_{96} < 3\frac{1}{7}d$. (2)

2) Аналогично вычисляются периметры правильных *вписанных* многоугольников, p_6, p_{12}, p_{24}, p_{48}, p_{96}, также приближающихся к длине окружности, но меньших её ("снизу"): $l > p_{96} > 3\frac{10}{71}d$. (3)

3) Из (2) и (3) приходим к доказываемому соотношению (1). Отметим, что Архимед провёл огромную вычислительную работу. Подробнее с ней можно познакомиться в [2, с. 267–269].

Равенство (1) мы записываем так: $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$ или $3{,}14084 < \pi < 3{,}14286$, где $\pi = l : d$.

Заметим: Архимед, видимо, понимал, что точное значение отношения $l : d$ найти невозможно. Поэтому он устанавливает *верхнюю* и *нижнюю* границы этого числа, мало отличающиеся друг от друга (приблизительно на 0, 002) [2, с. 553].

Теорема 2 (должна бы быть третьей!)

«Круг к квадрату на диаметре относится, как 11 : 14» [2, с. 267].

Такая формулировка без указания на приближённый характер отношения подтверждает, что до нас дошёл искажённый текст Архимеда [2, с. 267, сноска]. Эта теорема должна бы быть на третьем месте, так как при её доказательстве делается ссылка на **теорему 3.** Здесь появляется знаменитое приближённое значение Архимеда: $\pi \approx 22 : 7$ (тогда $S_{круга} = 22/7\,R^2$).

Оно, видимо, было столь популярно, что стало темой шутливого стихотворения (далее – выделено мною. – **А.Х.**):

Двадцать две совы скучали
На больших сухих суках.
Двадцать две совы мечтали
О ***семи*** больших мышах,
О мышах довольно юрких,
В аккуратных серых шкурках…
Слюнки капали с усов
У огромных серых сов!

③ Работа Архимеда *«О шаре и цилиндре»*

В этой работе Архимед принимает эстафетную палочку у Евклида, чтобы нести её дальше.

Сопоставляя математическое творчество Евклида и Архимеда, мы находим в них много общего. В частности, у обоих авторов многие работы начинаются с перечня необходимых определений, аксиом, теорем. Используется аксиоматический метод доказательств. Но имеются и заметные различия. Евклид в основном изучает площади и объёмы *прямолинейных* фигур. Поэтому у него нет правил (формул) для вычисления площадей круга (хотя есть теорема об отношении площадей двух кругов), нет правил нахождения боковых поверхностей цилиндра и конуса, правил вычисления объёмов цилиндра и конуса. У Евдокса – Евклида есть теоремы о том, что объём призмы (цилиндра) втрое больше объёма соответствующей пирамиды (конуса). Но как их вычислить в отдельности?

Евклид не дал **формул** площади поверхности и объёма шара и его частей.

Архимед же, «расправившись» с задачей о вычислении площади круга, ставит перед собою цель: найти площади и объёмы *криволинейных* фигур: цилиндра, конуса, усечённого конуса, шара, сегментов параболы, параболоида и пр.

Решению некоторых из этих задач и посвящена работа Архимеда «***О шаре и цилиндре***», написанная в виде письма к Досифею. Во введении автор пишет:

«*Архимед Досифею желает радоваться*!» Затем он перечисляет теоремы, которые доказал и послал ранее. Далее Архимед формулирует теоремы о шаре и цилиндре, над которыми работал в последнее время и доказательства которых собирается изложить в новом письме. «*Хотя эти свойства по самой природе всегда были присущими указанным телам, но всё же оказалось, что они остались неизвестными многим жившим до Евдокса знаменитым геометрам и ни одному из них не пришли на ум. Теперь же их могут усмотреть все, имеющие к тому силы*», – считает Архимед [2, с. 95].

Работа состоит из двух книг: книга I – теория, **книга II –** решение 9 задач о цилиндре, конусе и шаре. Поочерёдно рассмотрим их.

КНИГА I – из сочинения Архимеда «*О шаре и цилиндре*»

Она содержит **6 аксиом** (четыре из них – скорее определения), **5 допущений** (аксиом), **44 предложения**. В **книге I** рассмотрены теоремы о поверхностях и объёмах цилиндра, конуса, усечённого конуса, шара.

1. Обратим внимание на **V аксиому**. Это известная **аксиома исчерпывания Архимеда** (аналогичная аксиома была уже в работах Евдокса):

> «*Бóльшая из двух неравных линий, поверхностей или тел превосходит меньшую на такую величину, которая, будучи складываема сама с собой, может превзойти любую заданную величину из тех, которые могут друг с другом находиться в определённом отношении*» [2, с. 97].

Иначе говоря, если $a > b$, *то найдётся* $n \in N$, *что при любом* c $(a - b)\,n > c$.

2. Предложения I–XVI посвящены нахождению **боковой поверхности пирамиды, цилиндра, конуса и усечённого конуса.** Доказываются:

а) **теоремы VII** и **VIII** – о площади боковой поверхности пирамиды [2, с. 101];

б) **теорема XIII –** о площади боковой поверхности цилиндра:

> «*Поверхность всякого прямого цилиндра за вычетом оснований равна кругу, радиус которого является средней пропорциональной между стороной цилиндра и диаметром его основания*» [2, с. 109].

Ох, как непросто это понять, если нет формул! А если то же самое записать в современном виде, то получим:

$$S_{бок.\ цилиндра} = S_{круга} = \pi\,(\sqrt{H \cdot D})^2 = \pi \cdot H \cdot D = \pi \cdot H \cdot 2R = 2\pi RH$$ Знакомо?!

Доказательство этого утверждения проводится методом от противного:

1) Допустим, что $S_{бок.\ цилиндра} > S_{круга}$, это приводит к противоречию.
2) Допустим, что $S_{бок.\ цилиндра} < S_{круга}$, это приводит к противоречию.
3) Значит, $S_{бок.\ цилиндра} = S_{круга}$.

в) **Теорема XIV – о площади боковой поверхности конуса**:

> «*Поверхность всякого равнобедренного конуса за вычетом основания равна кругу, радиус которого есть средняя пропорциональная между стороной конуса* (образующей) *и радиусом круга, являющегося основанием конуса*» [2, с. 111].

В современной символике: $S_{бок.\ конуса} = S_{круга} = \pi\,(\sqrt{l \cdot R})^2 = \pi \cdot l \cdot R = \pi Rl$.
Доказательство – аналогичное тому, какое использовано в **теореме XIII**.

г) **Теорема XV** – о том, что $S_{бок.\ конуса} : S_{основания\ конуса} = l : R$ (l – образующая).

д) **Теорема XVI – о площади боковой поверхности усечённого конуса** [2, с. 113]:

«*Если рассечь равнобедренный конус плоскостью, параллельной основанию, то поверхность конуса между обеими параллельными плоскостями будет равна кругу, радиус которого является средней пропорциональной для стороны конуса между параллельными плоскостями и прямой, равной вместе взятым радиусам обеих кругов, лежащих в параллельных плоскостях*»:

$$S_{бок.\ усечённого\ конуса} = S_{круга} = \pi\left(\sqrt{l \cdot (R+r)}\right)^2 = \pi \cdot l \cdot (R+r) = \pi \cdot (R+r) \cdot l\,.$$

3. Далее Архимед движется к нахождению **поверхности шара**.

Архимед – о поверхности шара

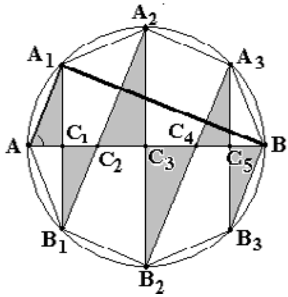
а) Предварительно он приводит **леммы 1–5** (цитируя Евклида, см. «***Начала***», **XII**, **11–14**) – об отношениях объёмов некоторых цилиндров и конусов [2, с. 114–115]. Затем идут **предложения XXI–XXV**, **XXX**, **XXXIII** – о поверхности шара.

б) **Теорема XXI – о сумме параллельных хорд.**

«*Если в круг вписан многоугольник с чётным числом равных сторон и в нём проведены прямые, соединяющие стороны многоугольника, и все параллельные какой-нибудь одной из стягивающих две стороны этого многоугольника, то все соединяющие (взятые вместе) будут иметь к диаметру круга то же отношение, какое прямая, стягивающая число сторон, на единицу меньшее половины всего их числа, имеет к одной стороне многоугольника*» [2, с. 118].

◄1) Пусть в окружность с диаметром AB вписан правильный многоугольник $AA_1A_2A_3BB_3B_2B_1$ с числом сторон $2n = 8$ (т.е. $n = 4$; на чертеже 23 в [2] $n = 6$). Обозначим сторону многоугольника, например, $AA_1 = a_{2n}$. Пусть A_1B – наибольшая из хорд, отличная от диаметра. Т.к. хорды $A_1B_1 \parallel A_2B_2 \parallel A_3B_3$, то надо доказать, что сумма параллельных хорд $A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$ так относится к диаметру AB, как наибольшая из хорд A_1B относится к стороне AA_1, т.е.

$$\boxed{\Sigma \parallel хорд : AB = A_1B : a_{2n}\,.}$$



2) $\Delta\, AC_1A_1 \sim \Delta\, C_1C_2B_1 \sim \Delta\, C_2C_3A_2 \sim \Delta\, C_3C_4B_2 \sim$
$\sim \Delta\, C_4C_5A_3 \sim \Delta\, C_5BB_3$ (обоснуйте!), поэтому

$$\frac{A_1C_1}{AC_1} = \frac{C_1B_1}{C_1C_2} = \frac{A_2C_3}{C_2C_3} = \frac{C_3B_2}{C_3C_4} = \frac{A_3C_5}{C_4C_5} = \frac{C_5B_3}{C_5B}\,.$$

3) По известному свойству пропорций

$$\frac{A_1C_1 + C_1B_1 + A_2C_3 + C_3B_2 + A_3C_5 + C_5B_3}{AC_1 + C_1C_2 + C_2C_3 + C_3C_4 + C_4C_5 + C_5B} = \frac{A_1C_1}{AC_1}\,,$$

то есть $$\frac{сумма\ \ параллельных\ \ хорд}{к\ \ диаметру\ \ AB} = \frac{A_1C_1}{AC_1}\,. \qquad (*)$$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИЛОЖЕНИЯ

А.Г. Хармац

МАТЕМАТИКА ДРЕВНЕГО МИРА
на уроках в школе

Материалы к лекциям и практическим занятиям по истории математики

Данная книга напоминает об основных этапах развития математики. Но главное внимание уделено становлению математики в эпоху Древнего мира. Математика рассматривается как неотъемлемая часть общечеловеческой истории на фоне развития мировой культуры.

В книге содержится много выдержек из работ классиков математики, что дает возможность почувствовать их стиль изложения, особенности математического языка. Читатель познакомится как с теоретическим материалом, написанным в доступной форме, так и с практическим, подразумевающим разбор задач. Среди них выделяются исторические (их более 160, и взяты они из произведений классиков) и учебные (их 83, они предложены автором для выработки навыков решения задач рассматриваемого типа). Кроме того, часть задач рекомендуется для самостоятельной работы. Приводятся эмоциональные вставки, забавные случаи и легенды о науке и ее творцах.

Издание адресуется студентам физико-математических факультетов педагогических вузов, преподавателям, читающим этот курс, учителям, старшеклассникам, а также всем, кто интересуется историей математики.

Хармац Анатолий Григорьевич окончил физико-математический факультет в 1955 г. и аспирантуру в 1963 г. Московского областного педагогического института имени Н.К. Крупской (ныне МГОУ).

Преподавал курсы по элементарной и высшей математике. С 1963 г. по 1967 г. читал лекции по истории математики в Псковском педагогическом институте имени С.М.Кирова и с 1994 г. по 2010 г. в Московском государственном областном университете.

Опубликовал статьи по различным вопросам истории математики в Ученых записках МОПИ, в журнале «Математика в школе», газете «Математика» о развитии математического образования в России в XVIII веке (в частности, о трудах Л.Ф.Магницкого, Л.Эйлера и других). Является автором многочисленных пособий для студентов по разным разделам элементарной и высшей математики, соавтором книги для поступающих в вузы.

ISBN 978-5-907100-62-6

9 785907 100626

Издательство Прометей