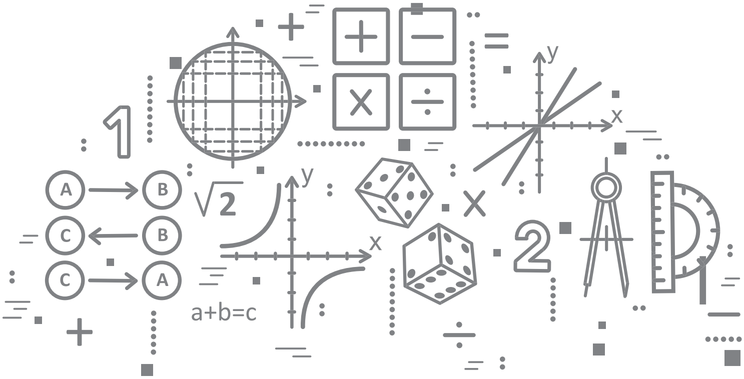
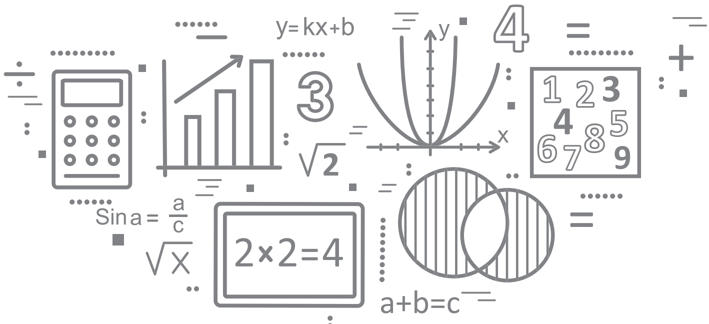
МАТЕМАТИКА

для каждого образованного человека



МАТЕМАТИКА

для каждого образованного человека



Издательство АСТ,
Москва

ОГИЗ

УДК 51
ББК 22.1
Г96

*Серия «Всё для каждого образованного человека»
основана в 2019 году*

Гусев, Игорь Евгеньевич.

Г96 Математика для каждого образованного человека / И. Е. Гусев. — Москва : Издательство АСТ, 2019. — 208 с.: илл. — (Всё для каждого образованного человека).

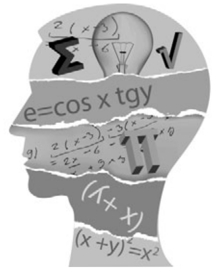
ISBN 978-5-17-116959-6.

Математика — уникальный язык мирового общения — связывает не только народы, но и разные области науки. Ученые говорят, что познать мир по-настоящему можно только с помощью математических моделей и расчетов, которые и предлагает эта точная наука. Замечательные и иррациональные числа, кватернионы Гамильтона и коническое сечение Аполлония, струны — в математике и в материи, фракталы Мандельбротта и риманова геометрия — эти и множество других гениальных открытий представлены на страницах этой книги.

УДК 51
ББК 22.1

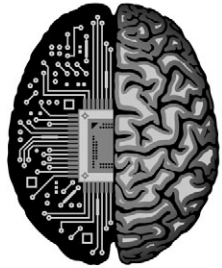
ISBN 978-5-17-116959-6

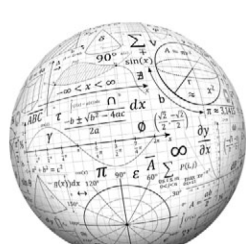
Предисловие

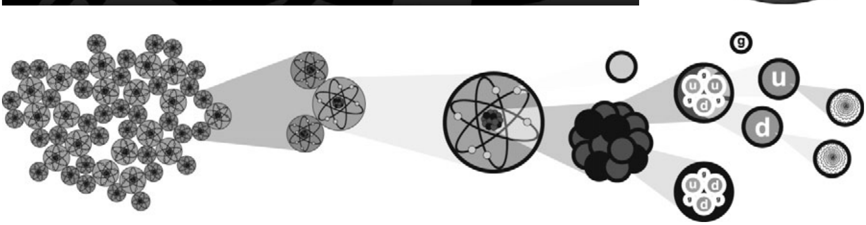


Математика охватывает, пожалуй, все области человеческой деятельности — и строительство, и транспорт, и музыку, и даже языкознание. Физика буквально пронизана математикой, химия и биология также тесно связаны с ней, а инженеры, не обладая математическими знаниями, вообще не смогли бы работать. Недаром Кант сказал: «В каждом отделе естествознания есть лишь столько настоящей науки, сколько в нем математики». И это совсем не удивительно, ведь познать мир по-настоящему можно только с помощью расчетов и моделей, которые как раз и предоставляет математическое знание. Здесь же вполне уместны и слова Галилея: «Книга природы написана на естественном языке разума — языке математики».

Умение находить аксиомы и доказывать теоремы позволяет четко мыслить в любой области знания. Математика только на первый взгляд может показаться далекой от жизни наукой, занимающейся абстрактными вопросами наподобие ленты Мёбиуса, точками вне и внутри замкнутой кривой или отношениями между числами. Все математические модели и идеи рано или поздно находят свое применение либо на практике, либо в других науках, помогая познавать мир. И конечно же, каждый образованный человек должен разбираться в основах этой царицы наук.







АКСИОМАТИЧЕСКИЙ МЕТОД ЕВКЛИДА

Отличительной особенностью математики является используемый ею метод рассуждения. Основу его составляют набор аксиом и применение к этим аксиомам дедуктивного доказательства (вывода). Слово «аксиома» имеет греческое происхождение и возникло из выражения «мыслить подобающим образом». Само понятие аксиомы — истины, столь самоочевидной, что она ни у кого не вызывает сомнения, — также введено греками.

Иными словами, должно существовать некоторое число утверждений — постулатов, или аксиом, которые принимаются в качестве истинных и доказательство которых не требуется. Из них можно пытаться вывести все другие теоремы путем чисто логической аргументации. Доказать теорему или иное утверждение — значит установить, что эта теорема есть необходимое логическое следствие из тех или иных утверждений; последние, в свою очередь, должны быть доказаны ранее, и т. д.

Выбор аксиом в значительной степени произволен. Однако от них будет мало пользы, если они недостаточно просты или если их слишком много. Далее, система постулатов должна быть совместимой (непротиворечивой) в том смысле, что никакие две теоремы, которые могут быть выведены из них, не должны содержать взаимных противоречий, и полной в том смысле, что всякая теорема, имеющая место в рассматриваемой области, может быть выведена из этих аксиом. Желательно также, чтобы система постулатов была независимой, т. е. чтобы ни один из них не был логическим следствием остальных.

Аксиомы о математических понятиях вводятся для того, чтобы понятия раскрывали те или иные стороны реальности. Скажем, аксиомы для отрицательных и комплексных чисел с необходимостью обязаны отличаться от аксиом для поло-

Евклид (ок. 325 — ок. 265 г. до н. э.), древнегреческий математик. Своим главным трудом — книгами «Начала» — заложил фундамент современной математики. Они стали образцом математического трактата, строго и систематически излагающего основные положения математической науки с помощью аксиоматического метода.

ОН БЫЛ ПЕРВЫМ

Евклид осуществил два великих нововведения. Первое — это идея доказательства. Евклид не считал любое математическое утверждение истинным, пока оно не установлено с помощью последовательности логических шагов, позволяющих вывести данное утверждение из того, что уже известно. Второе нововведение — это осознание того факта, что процесс доказательства должен начинаться с исходных утверждений, которые доказать нельзя. Евклид сформулировал пять таких фундаментальных предположений-постулатов, на которых основываются все его дальнейшие построения. Четыре из них просты и очевидны: любые две точки можно соединить прямой линией; любой конечный отрезок прямой можно продолжить; можно провести окружность с любым центром и любым радиусом; все прямые углы равны между собой.

Фрагмент «Начал» Евклида, найденный в древнеегипетском городе Оксиринх.

жительных чисел или последние должны по крайней мере допускать обобщения, охватывающие отрицательные и комплексные числа. Но сколь ни фундаментальны понятия и аксиомы, именно дедуктивные выводы из аксиом дают возможность получать полностью новое знание. Из многих типов рассуждений (индуктивных, по аналогии, дедуктивных и т. д.) только дедуктивное гарантирует правильность заключения. Например, делая вывод «Все яблоки красные» на том основании, что тысяча просмотренных нами яблок были красными, мы пользуемся индуктивным рассуждением, поэтому наше заключение ненадежно.

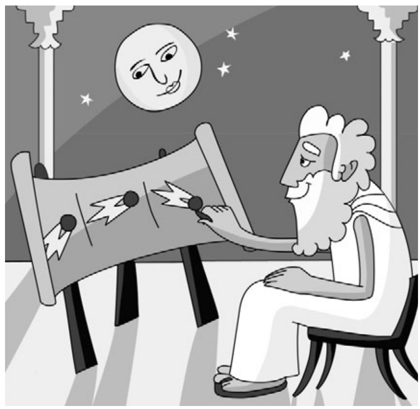
Принципы дедуктивного рассуждения, если их применить к любым посылкам, приводят к заключениям столь же надежным, как и посылки. Следовательно, если посылки были истинными, то заключения также будут истинными. Мы можем проверить сколько угодно чисел и убедиться, что каждое из них представимо в виде суммы двух простых чисел. Однако мы не можем утверждать, что наш результат есть математическая теорема, поскольку он не был получен путем дедуктивного доказательства.

Вместе с тем, выдающиеся открытия очень редко оказывались результатом применения чисто аксиоматических методов и дедуктивных рассуждений. Подлинный источник развития математики — это творческая мысль, питаемая интуицией. И если даже некоторые математики считают аксиоматизацию тем идеалом, к которому должна стремиться математика, было бы большой ошибкой считать, что аксиоматика сама по себе является сутью математики. Творческая, конструктивная интуиция ученого привносит в математику недедуктивные и иррациональные моменты, делая ее в этом отношении похожей на музыку или живопись.

РЕЗУЛЬТАТЫ

На основе логических построений, опираясь на свои аксиомы, Евклид получил ряд важных результатов:

- **Квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов двух других его сторон (это утверждение известно как теорема Пифагора).**
- **Любой угол можно точно разделить на две равные части, используя только циркуль и линейку.**
- **Можно построить правильные многоугольники с 3, 4, 5, 6, 8, 10 и 12 сторонами, используя только циркуль и линейку.**
- **Имеется ровно пять правильных тел: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.**



Евклид не только занимался математикой, но и писал труды по астрономии.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Евклид дал определения основным геометрическим понятиям — точке, линии (прямой или искривленной), окружности, прямому углу, плоскости и поверхности. Некоторые понятия он определил довольно точно. «Параллельные прямые, — писал он, — это прямые линии, которые, находясь на одной плоскости, продолженные до бесконечности в обоих направлениях, ни в одном из этих направлений не пересекаются».

ПРИНЦИП МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Известно, что последовательность натуральных чисел 1, 2, 3, 4, . . . не имеет конца: при ее перечислении, как только достигается некоторое число n, вслед за ним сейчас же можно написать ближайшее к нему натуральное число $n + 1$. Желая как-нибудь назвать эти свойства последовательности натуральных чисел, математики говорят, что этих чисел существует бесконечное множество.

Последовательность натуральных чисел представляет простейший и самый естественный пример бесконечного (в математическом смысле), играющего важнейшую роль в современной математике.

Последовательный, шаг за шагом, переход от n к $n + 1$, порождающий бесконечный ряд натуральных чисел, лежит в основе одного из главных методов рассуждений, используемых в этой науке, — метода (или принципа) математической индукции. Это основной принцип, на котором строятся математические доказательства. Скажем, подавляющее большинство формул, справедливых для натуральных чисел, могут быть доказаны методом математической индукции.

В общем смысле индукцией называют переход от частных утверждений к общим. Напротив, переход от общих утверждений к частным называется дедукцией.

Таким образом, индукция позволяет получить множество общих утверждений на основе известных или очевидных фактов. А метод математической индукции призван определить справедливость полученных утверждений.

Обозначим через A некоторое утверждение, относящееся к произвольному натуральному числу n. Ну, например, пусть A будет следующим утверждением: «Сумма углов в выпуклом многоугольнике с $n + 2$ сторонами равна $180° \cdot n$». Или возьмем в качестве примера утверждение: «Проводя n прямых на плоскости, нельзя разбить ее больше чем на 2^n частей». Чтобы доказать подобного рода теорему для произвольного значения n, недостаточно доказать ее отдельно для первых 10, или 100, или даже 1000 значений n.

Блез Паскаль (1623—1662), французский математик и физик. В трактате «Об арифметическом треугольнике» (1654) дал современное объяснение метода математической индукции.

Принцип математической индукции формулируется следующим образом. Предположим, что требуется установить справедливость бесконечной последовательности математических утверждений A_1, A_2, A_3, . . . , которые, будучи совместно взятыми, образуют некоторое общее утверждение A.

Допустим, что: а) проведено математическое рассуждение, показывающее, что если верно A_r, то верно и A_{r+1}, каково бы ни было натуральное число r, и б) установ-

ЧАСТНОЕ И ОБЩЕЕ

Число 128 делится на 2 без остатка — пример частного утверждения. Из него можно сформулировать немало более общих утверждений, причем как истинных, так и ложных. К примеру, более общее утверждение, что все целые числа, оканчивающиеся на 8, делятся на 2 без остатка, является истинным, а утверждение, что все трехзначные числа делятся на 2 без остатка, ложно.

лено, что A_1 верно. Тогда все предложения нашей последовательности верны и, следовательно, предложение A доказано.

Пример 1: арифметическая прогрессия. Каково бы ни было значение n, сумма $1 + 2 + 3 + \ldots + n$ первых n натуральных чисел равна $\frac{n(n+1)}{2}$.

Решение.

Чтобы доказать эту теорему по принципу математической индукции, мы должны для произвольного значения n установить справедливость соотношения A_n:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

1. Если r — некоторое натуральное число и если известно, что утверждение A_r справедливо, т. е. если известно, что

$$1 + 2 + 3 + \ldots + r = \frac{r(r+1)}{2},$$

то, прибавляя к обеим частям последнего равенства по $r + 1$, мы получаем:

$$1 + 2 + 3 + \ldots + r + (r+1) = \frac{r(r+1)}{2} + (r+1) = \frac{r(r+1)+2(r+1)}{2} = \frac{(r+1)\,(r+2)}{2},$$

а это как раз и есть утверждение A_{r+1}.

2. Утверждение A_1, очевидно, справедливо, так как $1 = 1 \cdot 2/2$.

Итак, по принципу математической индукции утверждение A_n справедливо при любом n.

Принцип математической индукции применяется и в геометрии.

Пример 2. Доказать, что число диагоналей выпуклого n-угольника G_n равно $\frac{n(n-3)}{2}$.

Доказательство.

1. При $n = 3$ утверждение справедливо, ибо в треугольнике $G_3 = \frac{3(3-3)}{2} = 0$ диагоналей.

2. Предположим, что во всяком выпуклом k-угольнике имеется $G_k = \frac{k(k-3)}{2}$ диагоналей.

3. Докажем, что тогда в выпуклом $(k + 1)$-угольнике число диагоналей равно $G_{k+1} = \frac{(k+1)(k-2)}{2}$.

Пусть $A_1A_2A_3 \ldots A_kA_{k+1}$ — выпуклый $(k + 1)$-угольник. Проведем в нем диагональ A_1A_k. Чтобы подсчитать общее число диагоналей этого $(k + 1)$-угольника, нужно подсчитать число диагоналей в k-угольнике $A_1A_2 \ldots A_k$, прибавить к полученному числу $(k - 2)$, т. е. число диагоналей $(k + 1)$-угольника, исходящих из вершины A_{k+1}, и, кроме того, следует учесть диагональ A_1A_k.

Таким образом, число диагоналей $(k + 1)$-угольника равно

$$G_{k+1} = G_k + (k-2) + 1 = \frac{k(k-3)}{2} + (k-2) + 1 = \frac{(k+1)(k-2)}{2}.$$

Вследствие принципа математической индукции утверждение верно для любого выпуклого n-угольника.

ЕЩЕ ОДИН ПРИМЕР

Докажем формулу

$$S_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \ldots + \frac{1}{n(n+1)} = \frac{n}{n+1}.$$

Метод математической индукции предполагает доказательство в три шага.

1. Проверим равенство для $n = 1$. Имеем

$$S_1 = \frac{1}{1\cdot 2} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

Это верное равенство.

2. Предположим, что формула $S_k = \frac{k}{k+1}$ справедлива.

3. Докажем, считая предыдущее соотношение справедливым, что

$$S_{k+1} = \frac{k+1}{(k+1)+1} = \frac{k+1}{k+2}.$$

Сумма $k + 1$ первых членов последовательности есть сумма первых k членов исходной числовой последовательности и $(k + 1)$-го члена: $S_{k+1} = S_k + \frac{1}{(k+1)(k+2)}$.

Подставляя в это равенство выражение для S_k из п. 2 и проведя элементарные преобразования, получим: $S_{k+1} = \frac{k+1}{k+2}$.

Следовательно, доказано равенство третьего пункта.

Таким образом, выполнены все три шага метода математической индукции и тем самым доказано наше предположение о справедливости формулы $S_n = \frac{n}{n+1}$.

ПРИНЦИП ДИРИХЛЕ

При решении самых различных задач часто бывают полезны общие принципы, облегчающие нахождение решений. Таковы, например, принципы математической индукции, суперпозиции, аналогии. Здесь рассматривается еще один весьма плодотворный подход — использование так называемого принципа Дирихле. Другие его наименования — принцип ящиков и принцип голубятни. Это утверждение часто оказывается полезным при доказательстве важнейших теорем в теории чисел, алгебре, геометрии.

Наиболее часто принцип Дирихле формулируется в одной из следующих форм: если пять кроликов помещены в четыре клетки, то в одной из клеток находятся не менее двух кроликов; или, другими словами, нельзя посадить пять кроликов в четыре клетки так, чтобы в каждой клетке находилось не более одного кролика.
В более общей форме этот принцип выглядит так: если $n + 1$ кроликов помещены в n клеток, то имеется клетка, в которой находятся не менее двух кроликов. Это тривиальное утверждение можно обобщить: если $2n + 1$ кроликов помещены в n клеток, то по крайней мере в одной клетке находятся не менее трех кроликов.
Существует еще более общая форма принципа Дирихле, включающая все предыдущие: если $kn + 1$ кроликов помещены в n клеток, то в одной из клеток находятся не менее $k + 1$ кроликов; или, в эквивалентной форме, нельзя посадить $kn + 1$ кроликов в n клеток так, чтобы в каждой клетке находилось не более k кроликов.
Принцип Дирихле по традиции принято излагать именно на примере кроликов или голубей и клеток.
Пример 1. В мешке лежат шарики двух разных цветов: черного и белого. Какое

Петер Густав Лежён Дирихле (1805—1859), немецкий математик, сделавший ряд крупных открытий в этой науке, а также высказавший плодотворную идею принципа, получившего его имя.

НЕМНОГО ИСТОРИИ

Свои исследования Дирихле проводил с кроликами и контейнерами. Он продемонстрировал, что если поместить, допустим, 5 кроликов в 7 контейнеров, то в среднем в одном контейнере будет находиться 5/7 животного. Однако кролика нельзя разделить на части, следовательно, хотя бы одна клетка будет пустовать (5/7 округляется в меньшую сторону до 0 целых). Точно так же и в обратном случае: если кроликов 7, а ящиков 5, то хотя бы в одном из них будет 2 кролика (7/5 округляется в бóльшую сторону до 2 целых). Отталкиваясь от этого утверждения, математик пришел к идее, которую сформулировал в форме принципа.

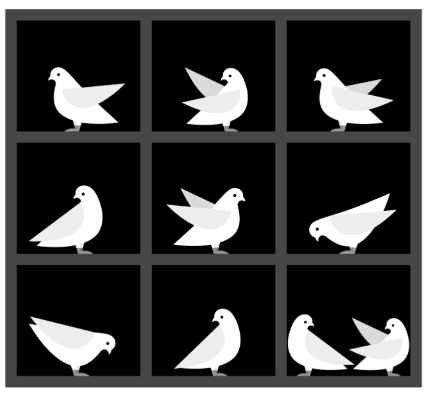
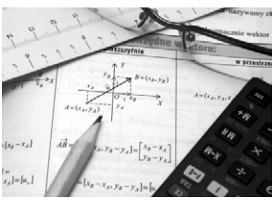
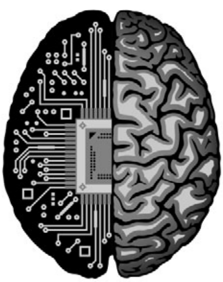


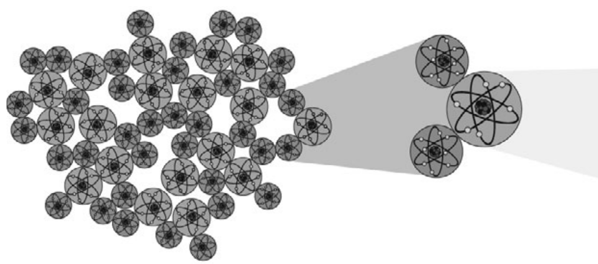
Иллюстрация принципа Дирихле на примере голубей и клеток.

СОДЕРЖАНИЕ

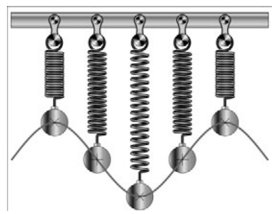


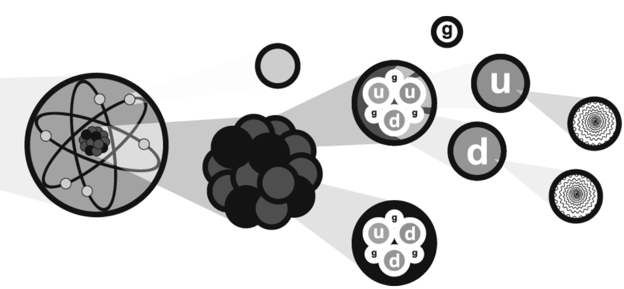


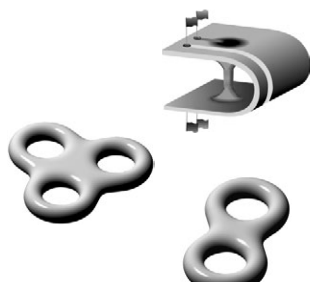
Предисловие....3
Аксиоматический метод Евклида....4
Принцип математической индукции....6
Принцип Дирихле....8
Теорема Гёделя....10
Абак....12
Системы счисления....14
Логарифмы....17
Вычислительная машина
Чарльза Бэббиджа....20
Отрицательные числа....24
Проблема Гольдбаха....26
Неравенство Коши....28
Неравенство Коши—Буняковского....30
Иррациональные числа....32
Комплексные числа....34
Замечательные числа....37
Формула Муавра....39
Кватернионы Гамильтона....41
Золотое сечение....43
Числа Фибоначчи....45
Треугольник Паскаля....47
Гармонический треугольник Лейбница....49
Бином Ньютона....51
Числа и числовая ось....53
Аналитическая геометрия....55
Теорема Пифагора....58
Теорема Птолемея....61
Теорема Фалеса....63
Теоремы Менелая и Чевы....65
Конические сечения Аполлония....68
Принцип Кавальери....72
Теорема Паппа—Гульдена....74
Теорема Лейбница для тетраэдра....76
Фракталы Мандельброта....78
Симметрии на плоскости....82
Векторный анализ....85
Лист Мёбиуса....89

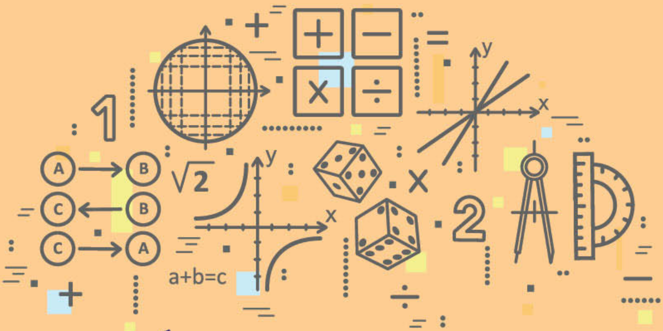


Топология....................91
Топология космоса....................95
Проблема четырех красок....................97
Задача о семи Кёнигсбергских мостах....................99
Теорема Жордана о замкнутой кривой....................101
Матрицы....................103
Линейное векторное пространство....................106
Векторы, матрицы и квантовая механика....................109
Многомерие....................113
Пространство Минковского....................117
Струны — в математике и в материи....................120
Пятый постулат Евклида....................123
Неевклидовы геометрии Гаусса....................125
Геометрия Лобачевского....................127
Риманова геометрия....................129
Геометрия космоса....................132
Формула Кардано и уравнения высоких степеней....................134
Основная теорема алгебры....................137
Теорема Безу....................140
Революция Галуа....................142
Группы и группы Галуа....................144
Представления групп и кварки Гелл-Мана....................148
Теорема Нётер....................151
Архимед — «отец» интегрального исчисления....................154
«Битва» Ньютона с Лейбницем....................156
Функции как сердце математического анализа....................158
Предел и непрерывность функции по Коши....................162
Интеграл....................165
Производная....................168
Основная теорема математического анализа....................172
Дифференциальные уравнения....................175
Обобщенный бином Ньютона и бесконечные ряды....................178
Формула Тейлора....................181
Ряды Тейлора и Маклорена....................183
Замечательный ряд Эйлера....................185
Анализ Фурье....................188
Канторовская алгебра множеств....................192
Теорема Герона....................196
Принцип Ферма....................198
Брахистохрона Бернулли....................200
Эволюция одной идеи....................203

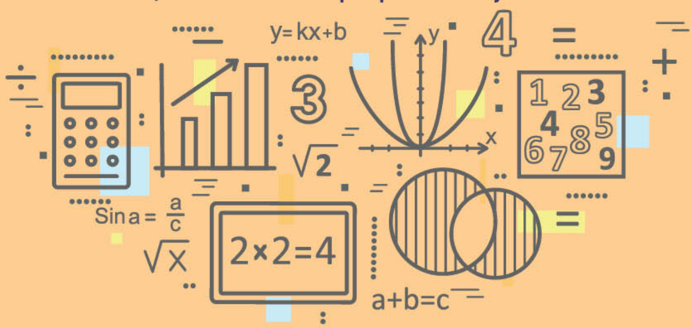








Современному образованному человеку не нужно доказывать, насколько важна математика. Ведь она не только интересна в теории, но и, очевидно, полезна в повседневности. Увлечение исследователей этой наукой привело к возникновению бесчисленного количества гениальных идей. Листая страницы этой книги, вы вспомните, что привычные нам числа могут быть замечательными и иррациональными, ближе познакомитесь с кватернионами Гамильтона и оцените изящество конических сечений Аполлония... А математические парадоксы, такие как знаменитая прогулка по семи кёнигсбергским мостам или поиски второй стороны ленты Мёбиуса, поднимут вам настроение. Математические идеи, представленные в этом издании, пересказаны простым языком, доступным самому широкому кругу читателей, а значит, не оставят равнодушным ни одного ценителя этой прекрасной науки.



ISBN 978-5-17-116959-6