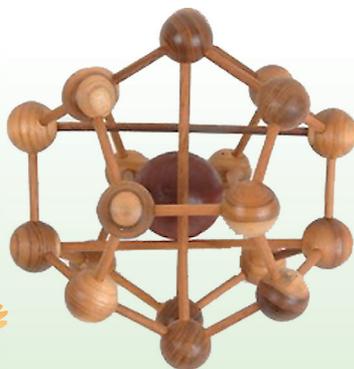


Анна Бураго



Дневник математического кружка



**Первый
год занятий**

Анна Бураго

Дневник математического кружка: первый год занятий

Перевод с английского А. В. Абакумова

Электронное издание

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 51(07)

ББК 22.1

Б91

Бураго А. Г.

Дневник математического кружка: первый год занятий /

Перевод с английского А. В. Абакумова.

Электронное издание.

М.: МЦНМО, 2017.

368 с.

ISBN 978-5-4439-3096-1

Книга содержит весь необходимый материал для проведения математического кружка в 5–7 классах в течение всего учебного года. Приводятся подробно изложенные темы для обсуждения в классе, наборы задач с решениями, математические игры и конкурсы. Автор — преподаватель математических кружков с многолетним стажем — делится профессиональными навыками ведения кружка. Читатель найдёт в книге советы, как организовать занятие, преподнести материал и избежать типичных ошибок.

Книга адресована учителям и руководителям математических кружков. Также она будет интересна школьникам, увлекающимся математикой, и их родителям.

Подготовлено на основе книги:

Бураго А. Г.

Дневник математического кружка: первый год занятий / Перевод с английского А. В. Абакумова. — М.: МЦНМО, 2017. — 368 с. — ISBN 978-5-4439-1096-3

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11,
тел. (499)241–08–04.

<http://www.mcsme.ru>

ISBN 978-5-4439-3096-1

© Бураго А. Г., 2017.

© МЦНМО, 2017.

Содержание

Предисловие	6
Благодарности	13

Раздел 1. Планы занятий

Введение	17
Занятие 1. Как решить задачу	19
Занятие 2. Рыцари и лжецы	31
Занятие 3. Как превратить ложь в правду	39
Занятие 4. Математический аукцион I	46
Занятие 5. Текстовые задачи и здравый смысл	52
Занятие 6. Ещё текстовые задачи	59
Занятие 7. Чётные и нечётные числа I. Волшебные бумажные стакан- чики	65
Занятие 8. Чётные и нечётные числа II. Определения и свойства . . .	72
Занятие 9. Математический хоккей I	82
Занятие 10. Чётные и нечётные числа III. Чередование	88
Занятие 11. Взвешивания и фальшивые монеты	96
Занятие 12. Математическая олимпиада I	103
Занятие 13. Знакомство с кубом	109
Занятие 14. Сечения	118
Занятие 15. Математический аукцион II	126
Занятие 16. Комбинаторика I	131
Занятие 17. Комбинаторика II	143
Занятие 18. Математический хоккей II	153
Занятие 19. Числовые ребусы I. Потерянные цифры	158
Занятие 20. Числовые ребусы II. Зашифрованные примеры	164
Занятие 21. Математическая олимпиада II	169
Занятие 22. Делимость I. Определение и свойства	174
Занятие 23. Делимость II. Простые числа и разложение на простые мно- жители	184
Занятие 24. Математический аукцион III	193
Занятие 25. Делимость III. Признаки делимости	196
Занятие 26. Делимость IV. Взаимно простые числа	204
Занятие 27. Математические игры со стратегией I	209

Занятие 28. Математические игры со стратегией II	218
Занятие 29. Математическая олимпиада III	224

Раздел 2. Математические турниры

Математические соревнования	231
Математический аукцион	232
Математический хоккей	238
Математические олимпиады	241
Короткие увлекательные игры	246

Раздел 3. Еще несколько советов преподавателю

Как стать первоклассным преподавателем математического кружка	251
Будни математического кружка	254
Где найти ответы на вопросы	261

Раздел 4. Решения

Занятие 1. Как решить задачу	265
Занятие 2. Рыцари и лжецы	268
Занятие 3. Как превратить ложь в правду	271
Занятие 4. Математический аукцион I	274
Занятие 5. Текстовые задачи и здравый смысл	275
Занятие 6. Ещё текстовые задачи	278
Занятие 7. Чётные и нечётные числа I. Волшебные бумажные стакан- чики	282
Занятие 8. Чётные и нечётные числа II. Определения и свойства	285
Занятие 9. Математический хоккей I	288
Занятие 10. Чётные и нечётные числа III. Чередование	291
Занятие 11. Взвешивания и фальшивые монеты	294
Занятие 12. Математическая олимпиада I	298
Занятие 13. Знакомство с кубом	303
Занятие 14. Сечения	306
Занятие 15. Математический аукцион II	309
Занятие 16. Комбинаторика I	312
Занятие 17. Комбинаторика II	317
Занятие 18. Математический хоккей II	320
Занятие 19. Числовые ребусы I. Потерянные цифры	323
Занятие 20. Числовые ребусы II. Зашифрованные примеры	326

Занятие 21. Математическая олимпиада II	329
Занятие 22. Делимость I. Определение и свойства	335
Занятие 23. Делимость II. Простые числа и разложение на простые мно- жители	339
Занятие 24. Математический аукцион III	343
Занятие 25. Делимость III. Признаки делимости	345
Занятие 26. Делимость IV. Взаимно простые числа	349
Занятие 27. Математические игры со стратегией I	352
Занятие 28. Математические игры со стратегией II	356
Занятие 29. Математическая олимпиада III	359
Библиография	367

Предисловие

Что такое математический кружок?

Когда о математике говорят в повседневной жизни, чаще всего имеется в виду арифметика. Подобным образом и родители, оценивая успехи своих детей в математике, часто исходят из того, насколько хорошо они справляются с решением типичных задач, встречающихся на экзаменах. Но в математических кружках занимаются совершенно другими вещами.

В математическом кружке не учат считать и не готовят к тестам. Там занимаются той математикой, которая развивает логическое мышление, творческие способности, умение анализировать и решать сложные задачи. Занятия в математическом кружке дают ребёнку гораздо больше, чем просто набор новых математических знаний. Кружок помогает детям обнаружить и развить свои способности; он вселяет в них интерес к математике и смежным с ней наукам, который сохраняется на всю жизнь.

Интересные и увлекательные темы, которыми занимаются в математическом кружке, обычно выходят за рамки школьной программы. Немалая часть занятия посвящается решению нестандартных задач. И задачи, и темы занятий подбираются так, чтобы стимулировать творческие способности и развивать математическое мышление. Нередко теория приходит к ученикам естественным путём, через задачи, которые они решают. Важную часть программы составляют математические игры, соревнования, олимпиады.

И ещё математический кружок — это такое замечательное место, где дети, увлекающиеся математикой, могут познакомиться со сверстниками со сходным складом ума. Кружок становится группой по интересам, где его участники находят себе друзей.

Кружки предназначены для любознательных детей, которые интересуются математикой и точными науками, получают удовольствие от решения трудных задач и готовы изучать математику за пределами школьной программы. Весьма вероятно, что большая часть участников математического кружка не станут профессиональными математиками, а проявят себя в совершенно других областях. Но математика останется для них добрым помощником как в школьные и университетские годы, так и в дальнейшей жизни. Математическая культура, способности к решению задач и навыки

анализа, которые развиваются в математических кружках, послужат надёжной опорой во многих профессиях

Об этой книге

Эта книга была изначально написана на английском языке, для того чтобы помочь зарубежным читателям познакомиться с культурой математических кружков.

Долгие годы такие кружки существовали только в России и в странах Восточной Европы. Но в последние годы внеклассные формы обучения математике, в том числе кружки, становятся всё более популярными во многих странах мира.

Инициатива исходит и от родителей, и от учебных заведений. Многие родители видят в таких занятиях возможность развить у детей творческое мышление, повысить интерес к предмету и вообще к точным наукам. Другие стремятся ускорить развитие математических способностей, хотят, чтобы дети участвовали в математических соревнованиях и олимпиадах. Помимо этого, всё больше университетов рассматривают устройство математических кружков как свой вклад в образование школьников.

Таким образом, среди родителей и учителей математики в самых разных концах земного шара растёт интерес к математическим кружкам и к методике преподавания в них.

К сожалению, самообразование в этой области может занять немало времени: количество литературы и других ресурсов пока ещё не очень велико. Обычно будущему учителю приходится внимательно изучать несколько книг и много придумывать самому, для того чтобы сформировать преподавательский подход и разработать программу для кружка.

Данная книга призвана ускорить этот процесс. В ней есть всё, что необходимо для ведения кружка в течение целого года. Книга разделена на 29 занятий; приводятся подробно изложенные темы для обсуждения в классе, наборы задач, типичные детские ошибки, решения, математические игры и конкурсы. Ещё одна цель книги — поделиться профессиональными навыками ведения кружка. Читатель найдёт в ней советы о том, как организовать занятия, преподнести материал и избежать типичных ошибок.

Этой книгой можно пользоваться по-разному:

- взять её за основу при составлении программы кружка;

- по мере необходимости брать из неё теоретический материал и задачи по темам;
- пользоваться ей как сборником задач, конкурсов и игр.

В течение последних десяти лет автор этой книги активно участвовала в проведении математических кружков в США. Эта книга основана на её опыте и на материалах этих кружков.

Книга рассчитана на учеников 5—7 классов. Школьники этого возраста необыкновенно восприимчивы к обучению. Они любознательны, легко впитывают всё новое, искренне гордятся неожиданным открытием или победой над трудной задачей. Показывать юным ученикам красоту этой науки, наблюдать за их ростом и развитием чрезвычайно увлекательно. А умение учиться и думать, приобретённое детьми в этом возрасте, сохранится на всю жизнь и окажет неоценимую помощь в последующем образовании.

Об авторе

Меня зовут Анна Бураго. Я выросла в Санкт-Петербурге — одном из центров математической культуры. В пятом классе я впервые пришла в математический кружок. С тех пор математика стала увлечением всей моей жизни. Математический кружок — одно из самых приятных воспоминаний моих школьных лет. Я приобрела не только знания, но и новых друзей. Замечательные преподаватели и в школе, и в кружке всегда вызывали у меня уважение и восхищение. Окончив физико-математическую школу, я продолжила изучение математики в Санкт-Петербургском государственном университете. На всём протяжении учёбы в университете я сама с увлечением вела математический кружок.

После того как мы с мужем переехали в США, я училась в аспирантуре по специальности «математическая физика», а потом много лет занималась разработкой компьютерных программ. (Кстати, опыт решения нестандартных задач очень помогает при прохождении собеседований на работу.) Идея математического кружка в первый раз возникла в нашей семье, когда наш старший сын перешёл в пятый класс. Мы стали искать для него хорошую программу по внешкольной математике, но оказалось, что в наших краях (мы живём в Сиэтле) были только центры подготовки к контрольным работам.

Мой муж Андрей — выпускник математической школы и большой любитель внешкольной математики. Немного подумав, мы ре-

шили, что сами откроем математический кружок! Этому решению сильно помогло то, что нам было легко найти единомышленников. Многие из наших друзей, живших неподалёку, тоже прошли через математические школы и кружки и хотели того же для своих детей.

Мы собрались с духом, установили в гостиной классную доску и объявили об открытии первого математического кружка города Сиэтла. К нам пришли дети наших друзей, друзья наших детей, дети друзей наших друзей и друзья друзей наших детей. К нашему удивлению и гордости, этот первый кружок просуществовал восемь лет — до тех пор пока большинство участников не окончили школу и не разъехались по университетам. Некоторые из наших выпускников теперь сами преподают в кружках.

Через три года после начала работы первого кружка был организован второй, потом третий, четвёртый, пятый... Движущая сила во всех этих кружках — добровольцы (родители и не только), которые тратят своё время и усилия на обучение подрастающего поколения премудростям математической науки. Не могу не упомянуть имена наших замечательных преподавателей. Александр Гиль — один из руководителей нашего первого кружка и неотъемлемый участник всех остальных. Люба и Сергей Малкины — замечательные преподаватели второго кружка, неизменные помощники во всех остальных и руководители многочисленных англоязычных кружков. Александр Ващилло и Дмитрий Василевский — руководители и движущая сила для нескольких последующих поколений русскоязычных кружков.

Сейчас город Сиэтл может гордиться своими разнообразными математическими кружкам. Есть наша система русскоязычных кружков, для которой мы придумали весёлое имя — «Северо-Западная академия наук» (Northwest Academy of Sciences). Также есть сеть англоязычных кружков Prime Factor, которую я основала, когда окончательно решила сменить профессию программиста на преподавателя. Есть математические кружки при нашем университете, в которых успешно учили детей наши старшие выпускники, и есть ещё много мест, где дети могут заниматься интересной и полезной математикой.

Мы уверены, что наше дело далеко от завершения. Мы не стали дожидаться, пока наша младшая дочь дорастёт до пятого класса. Вместо этого, когда ей было семь лет, мы открыли кружок для детей её возраста. Теперь мы осваиваем науку ведения математических

кружков для младшеклассников. Впереди у нас долгий путь с открытиями, приключениями и сюрпризами.

Как возникла эта книга

Если относиться к математическому кружку серьёзно, он требует от преподавателя огромных затрат времени. Надо выбрать подходящую программу. Для каждого занятия нужно продумать форму подачи материала, подобрать задачи и сделать многое другое.

Конечно, по мере накопления опыта всё это становится проще. Но первый кружок, который мы вели в США, потребовал от нас массы времени и усилий, хотя все мы преподаватели со стажем и в нашем распоряжении было множество материалов — помимо англоязычной литературы по этой теме, обширная коллекция книг на русском языке.

Оказалось, однако, что большинство книг на английском языке рассчитано на более высокий уровень математической подготовки, чем пятый класс. Книгами на русском языке также нужно было пользоваться с осторожностью, так как оказалось, что не все темы из них подходят для американских кружков. Дело в том, что школьные программы по математике в США и России существенно различаются: американские школьники знают меньше своих русских сверстников. Поэтому некоторые темы пришлось либо дополнить изучением материала, который в России входит в школьную программу, либо вовсе исключить.

Неожиданной для нас оказалась проблема мотивации и вовлечённости участников. Вспоминая детство, мы все можем сказать: математические кружки были *одним из главных дел* в нашей жизни. Во многом это определялось средой — математическими олимпиадами, лагерями, школами. Участники наших первых американских кружков находились в другой ситуации. Это были способные и любознательные дети, но математический кружок для них был одним из многих внешкольных занятий.

Поэтому часть нашей работы состояла в том, чтобы убедить детей: математика — это увлекательно.

Самого по себе очарования необычных, интересных задач было недостаточно: приходилось прибегать к специальным приёмам для оживления занятий. Например, мы старались придумывать для задач занимательные сюжеты. Мы также проводили множество раз-

влекательных математических мероприятий: конкурсы команд, игры, олимпиады.

К чести наших участников, эти усилия оправдали себя: в каждом из кружков сформировалась группа детей, для которых обучение в кружке стало очень важным и интересным.

Долгая жизнь нашего первого кружка объясняется двумя причинами: наш небольшой коллектив преподавателей всегда работал вместе, и мы все видели, насколько полезен кружок для его участников. Вести следующие кружки было значительно проще благодаря накоплению опыта и учебных материалов.

Наш опыт оказался ценным не только для нас. На фоне растущего интереса к математическим кружкам Американское математическое общество (AMS) и Институт математических исследований в Беркли (MSRI) заинтересовались нашим опытом. Эта книга написана по заказу AMS и MSRI, её цель — подробно рассказать и показать, как начинать математический кружок и чему учить детей в первый год обучения.

Книга задумана и написана как ресурс, максимально облегчающий жизнь начинающего преподавателя. Она шаг за шагом проводит читателя через уроки, подробно рассказывая, советуя и указывая на типичные ошибки. Этот формат оказался очень удачным для страны, в которой нет давних традиций, но есть большой интерес к внешкольной математике.

Я очень благодарна издательству МЦНМО за возможность напечатать эту книгу на русском языке. У российских читателей, конечно же, гораздо больше опыта и больше возможностей для самообразования в области математических кружков. Но я надеюсь, что эта книга найдёт своих читателей, которым она поможет сориентироваться в мире математики, даст им материал для размышлений и, наконец, облегчит жизнь и сэкономит время при подготовке и проведении занятий.

Возраст участников

Эта книга предназначена для работы с учениками 5—7 классов¹, не обязательно имеющими опыт занятий в математическом кружке. Некоторые темы и задачи можно также включить в программу кружка для детей помладше или постарше.

¹ Возраст пятиклассников в США (на начало учебного года) — от 10 до 11 лет. — Прим. перев.

Представленные в книге темы интересны и доступны участникам с разным уровнем подготовки. Подборки задач тоже составлены так, чтобы и начинающим, и опытным участникам было над чем поработать. Некоторые задачи решаются с помощью знаний, полученных в кружке, а для других достаточно логики и здравого смысла. В каждую подборку включено несколько дополнительных задач для групп с более высоким уровнем подготовки.

Благодарности

Начинать эту книгу, конечно, следует с длинного списка благодарностей. Трудно перечислить всех тех замечательных людей, которые прямо или косвенно помогали мне в работе: одни — советом, опытом и одобрением, другие — тем, что гуляли с моими детьми и помогали готовить обеды.

Возглавляет этот список моя семья — муж, мама и дети. Без их поддержки и помощи я никогда не смогла бы уделить так много времени работе над этой книгой. Моя замечательная семья стойко терпит все мои странности, увлечения и круглосуточную работу. Я благодарна им за поощрение, за готовность подставить плечо и за поддержку в быту и в жизни.

Особая благодарность причитается моему мужу, Андрею Бураго. С самого начала он был тем самым человеком, который верил, что я могу довести этот проект до конца. Пока я работала над книгой, он совмещал должности болельщика, редактора, технического консультанта, эксперта в области математики, а также громоотвода: именно на него выливались все мои жалобы, расстройства и сомнения.

Мне очень повезло, что в моей жизни есть замечательная подруга Нелли Ткач — филолог, знаток русского и английского языка, и человек, активно заботящийся о благе человечества. Главу за главой, она редактировала со мной эту книгу, при этом терпеливо обучая меня навыкам писательского мастерства и искусству работы с текстом. Если бы не её вежливые и настойчивые и вопросы о том, когда же будет готова следующая глава, то книга была бы закончена намного позже.

Издательство AMS позаботилось о том, чтобы у этой книги был замечательный технический редактор, профессор Сильвио Леви, MSRI. Я благодарю его за все поправки, комментарии, предложения и улучшения. Его энциклопедические знания и способность плодотворно работать 24 часа в сутки вызывают у меня зависть и восхищение.

Я очень признательна Юлии Бродской, моей коллеге и энтузиасту математических кружков, человеку, с которым хорошо и интересно общаться. Идея писать эту книгу оказалась неожиданным результатом одной из наших бесед.

Большое спасибо всем, кто помогал мне советами и редактировал мои тексты: Коле Малкину, Ольге Радко, Любе Малкиной, Александру Гилю, Сергею Генкину и многим другим.

Я признательна Давиду Окли, Татьяне Шубиной, Сергею Гельфанду и совету серии «Библиотека математического кружка/MSRI». Они увидели потенциал в первых главах, поддержали идею и оказывали помощь и поддержку на всех этапах подготовки и публикации книги.

Последними в этом списке, но первыми по важности идут замечательные люди, которые создали, поддерживают и развивают культуру математических кружков. Эта книга является результатом опыта работы многих поколений преподавателей, профессионалов и мастеров своего дела, которые находили замечательные темы, придумывали интересные задачи и щедро делились своим знаниями.

Благодарности к русскому изданию

Я безмерно рада, что моя книга будет напечатана в издательстве МЦНМО. Трудно преувеличить вклад МЦНМО в поддержку и развитие математической культуры: это полезные книги, интересные мероприятия, многочисленные классы, обширная сетевая база задач и математической литературы и многое другое.

Отдельная благодарность моему редактору Ольге Васильевой — человеку высокой квалификации и замечательному мастеру своего дела. Работая над книгой, она находила такие хитрые ошибки и опечатки, которые ускользнули от взгляда автора, от редактора первого издания, а также от самых дотошных читателей.

РАЗДЕЛ 1

Планы занятий

Введение

Эта книга — об искусстве преподавания в математическом кружке. Наряду с обширными учебными материалами, мы обсуждаем профессиональные приёмы, накопленные за долгие годы работы в кружках.

Книга состоит из четырёх частей. Первая часть — это учебная программа математического кружка для 5—7 классов, рассчитанная на год. В этой части двадцать девять глав — по числу занятий. В каждой главе приводится подробный конспект занятия и даётся подборка задач для самостоятельного решения. Мы рассказываем о том, как лучше изложить тему, каких типичных ошибок следует избегать и какие вопросы обычно задают дети. Для тех занятий, на которые запланированы математические развлечения (турниры, игры, олимпиады), мы даём советы по их подготовке и проведению.

Вторая часть посвящена математическим развлечениям. В ней подробно рассказывается о конкурсах, олимпиадах и играх, которые мы любим проводить на занятиях.

В третьей части рассматриваются принципы преподавания в кружке и некоторые вопросы организации занятий.

Наконец, четвёртая часть — это подсказки, ответы и решения ко всем задачам в книге.

Программа этой книги была опробована и отлажена на четырёх математических кружках: в «Северо-Западной академии наук», в двух кружках центра Prime Factor и в центре Робинсон для юных исследователей при университете штата Вашингтон. Все четыре кружка служили источником вдохновения и одновременно испытательным полигоном. Опыт работы в каждом из кружков внёс свой вклад в материал, включённый в книгу. Например, благодаря паре очень способных участников из центра Робинсон в книгу попала серия более трудных задач.

Один из этих четырёх кружков стал основой сюжета книги: именно из него взята большая часть высказываний, вопросов и замечаний участников. Этот кружок был очень неоднородным: в нём было несколько «матёрых математических волков», которые посещали в своих школах математические клубы, участвовали в конкурсах и получали призы. Остальные были новичками и пришли потому, что хотели «попробовать что-то новое».

В группе, о которой идёт речь, занимались пятиклассники, шестиклассники и один талантливый четвероклассник. Занятия проходили раз в неделю и продолжались два часа. В течение года состав кружка изменялся: кто-то из участников уходил, приходили новые. По большей части на занятиях было около десяти детей. Поскольку в тексте книги встречаются замечания и реплики участников, приведу здесь некоторые имена: Тара, Соннет, Кейси, Сэм, Эндрю, Эмма М., Эмма К., Кевин, Брейди, Колин, Ришав и Дэвид.

О подборках задач

К каждому занятию в этой книге прилагается подборка задач, содержащая от пяти до восьми задач. Чтобы сделать задание более полезным и интересным, в подборку обычно включаются задачи по разным темам.

Задачи также различаются по уровню сложности: самые трудные отмечены звёздочкой. Дополнительные задачи, которые преподаватель может давать по своему усмотрению, отделены от остальных задач горизонтальной линией.

Ко всем задачам в книге приведены решения. Они часто сопровождаются разбором типичных ошибок, подсказками для участников и преподавателей и рекомендуемыми способами доходчиво объяснить задачу. Поэтому прочитать решения будет полезно даже опытному преподавателю.

Занятие 1

Как решить задачу

Сначала несколько слов о том, как пользоваться этой книгой.

Если предстоящее занятие математического кружка — первое в вашей жизни, сначала прочитайте главу «Как стать первоклассным преподавателем математического кружка» (с. 251). В ней вы найдёте принципы преподавания в кружке и профессиональные секреты, которые помогут сделать кружок действительно интересным. Затем рекомендую просмотреть главу «Будни математического кружка» (с. 254), где предлагаются идеи по организации и структуре занятий.

Подготовка к занятию

Вот что нужно сделать для подготовки к первому занятию.

- Завести журнал кружка. Он предназначен для хранения учебных материалов — подборок задач и записей к занятиям, а также для учёта решённых задач.
- Составить список участников с информацией о каждом: класс, возраст, адреса электронной почты и контактные телефоны родителей и т. п. Как собрать эти сведения? Во-первых, можно получить их от родителей по электронной почте. Другой способ — формы интернет-регистрации. (Такую форму нетрудно создать с помощью интернет-служб. Например, в Google Forms можно не только создавать опросы, но и хранить их результаты.)
- Подготовить информационный листок для раздачи участникам. На этом листке — то, что нужно знать участникам и их родителям: свой контактный телефон и адрес электронной почты, время и место проведения занятий, список необходимых принадлежностей и другие важные сведения.
- Распечатать в достаточном количестве экземпляров подборку задач для первого занятия (она приведена в конце этой главы).
- Купить несколько коробок счётных палочек или спичек. Они пригодятся для решения одной из задач первого занятия.

План занятия

На первом занятии предстоит сделать много разных вещей. Лучшее записать их, чтобы ничего не пропустить.

1. Знакомство
2. Математическая разминка
3. Рассказ о математических кружках
4. Обсуждение темы занятия: «Что значит решить задачу?»
5. Решение задач

Знакомство и математическая разминка

Я представляюсь и знакомлюсь с участниками. Затем перехожу к математической разминке. Разминка — это чаще всего несколько несложных занимательных задач. Отличный способ занять детей, пока подтягиваются опоздавшие.

Перед тем как дать задачи для разминки, я объясняю, что они не очень трудные, но требуют сообразительности. Чтобы их решить, важно мыслить нестандартно и выдвигать неожиданные идеи.

Задача для разминки 1. В семье пять братьев. У каждого брата одна сестра. Сколько всего детей в этой семье?

Задача для разминки 2. Некто положил две монеты в два кошелька так, что в одном кошельке оказалось в два раза больше монет, чем в другом. Как он это сделал?

Сначала дети предлагают ничего не класть в один кошелёк, а в другой положить две монеты. Я объясняю, что тогда в одном кошельке будет не *в два раза* больше монет, чем в другом, а *на две* монеты больше. Следующая идея — оставить оба кошелька пустыми (в два раза больше нуля — это всё равно ноль). Я отвечаю, что обе монеты должны оказаться в кошельках. Наконец, я предлагаю участникам представить себе большие, мягкие кожаные кошельки. С помощью этой подсказки Эндрю находит верное решение.

Для преподавателей. Ответы к задачам для разминки и решения всех задач приведены в части «Ответы и решения» (с. 265).

Даже такая простая вещь, как разминка, не обходится без профессиональных секретов. В главе «Будни математического кружка» (с. 254) я рассказываю о разминке более подробно.

В первый раз я допустила ошибку: начала занятие не с разминки, а с рассказа о математическом кружке. Пока я объясняла детям важные организационные вопросы, подходили опоздавшие участники. В итоге пришлось рассказывать всё сначала.

Что такое математический кружок?

Поскольку большинство участников пришли на математический кружок впервые, мне пришлось вкратце объяснить, чего можно ожидать от наших занятий. Не так-то просто рассказать за пять минут, что такое математический кружок. Я подготовила короткое выступление, которым более или менее довольна.

«Сегодня первое занятие нашего математического кружка. Давайте поговорим о том, что же это такое. Я скажу странную вещь: на математических кружках не изучают математику. Я имею в виду, что мы не будем заниматься той математикой, которую вы изучаете в школе.

Мы будем гораздо меньше считать, а вместо этого будем решать интересные и необычные задачи. Они будут самыми разнообразными: логические задачи, головоломки, задачи, требующие творческого мышления и строгих доказательств. Могу обещать, что вы не раз испытаете ни с чем не сравнимое ощущение: „Нашёл!“

Время от времени мы будем проводить математические игры и конкурсы. Другие занятия будут посвящены различным способам решения задач и элементам математической теории. А ещё мы будем учиться объяснять решения. Для большинства задач, с которыми мы будем иметь дело, недостаточно дать ответ: надо ещё обосновать его.

У этого кружка есть ещё одна особенность. Я — ваш преподаватель — хочу, чтобы вы как можно больше разговаривали на занятиях: прерывали меня вопросами, выдвигали идеи, угадывали ответы и даже спорили со мной. Учиться будет не скучно. Если кто-то даст неверный ответ или выдвинет странную идею — замечательно: это часть процесса обучения. Странная на первый взгляд идея может оказаться наилучшим шагом на пути к верному решению».

На этом этапе я не касаюсь организации отдельных занятий: это будет проявляться по мере необходимости.

Я напоминаю детям, что понадобится приносить с собой на занятия: папку для хранения всех принадлежностей, тетрадь в клетку, бумагу для черновиков, ручки, простые карандаши, пару цветных карандашей, линейку. Калькуляторы не нужны.

Наконец, раздаю экземпляры информационного листка.

Тема занятия: «Что значит решить задачу?»

Одной из наших основных целей на первые несколько месяцев будет развитие у участников кружка культуры логических рассуждений. Мы узнаем, что решить задачу — значит *вывести* ответ, а не угадать его. А объяснить решение — значит не просто дать ответ. Решение должно содержать чёткое логическое обоснование всех его этапов, с формулировкой предположений и выводов.

Поэтому весь остаток занятия мы говорим о том, как решать задачу и как объяснять решение. Работаем над задачами вместе (всей группой). Для этого занятия подобраны разнородные задачи, не связанные с конкретной темой. Их объединяет общая цель: дать участникам попробовать задачи математического кружка «на вкус» и одновременно показать на примерах, что значит «объяснить решение». Первые задачи довольно простые: они помогают преодолеть психологический барьер. Ближе к концу задачи усложняются.

Для преподавателей. 1. Давайте детям задачи одну за другой. Призывайте участников выдвигать идеи. Подытоживайте эти идеи, а в конце обсуждения каждой задачи рассказывайте полное решение.

2. Не забывайте, что у детей разный уровень математической подготовки. Старайтесь, чтобы каждый внёс вклад в решение задачи. Убедитесь в том, что каждый участник понял все этапы решения.

3. Подробнее об особенностях преподавания в кружке говорится в главе «Как стать первоклассным преподавателем математического кружка» (с. 251).

Пример 1. Девочка и мальчик залезли на дерево, чтобы собрать вишни для пирога. Девочка была старше и поэтому собрала в два раза больше вишен, чем мальчик. Вместе они принесли домой 72 вишни. Сколько вишен собрал каждый из детей в отдельности?

РАЗБОР ПРИМЕРА 1. Начинаем с базового понятия: уточняем, что означает «в два раза больше» (в одной из моих групп возникла путаница с понятием «на два больше»). Затем обсуждаем, как представить «в два раза больше» наглядно. В группе рождается идея: в два раза больше — это две кучи по сравнению с одной кучей. Затем появляется ещё один вариант: две корзины по сравнению с одной корзиной.

Мы останавливаемся на корзинах, поскольку нарисовать их проще, чем кучи. Итак, я рисую на доске три корзины:



Сколько всего вишен в этих трёх корзинах? Ответ: 72.

Сколько вишен в каждой корзине? Ответ: $72 : 3 = 24$.

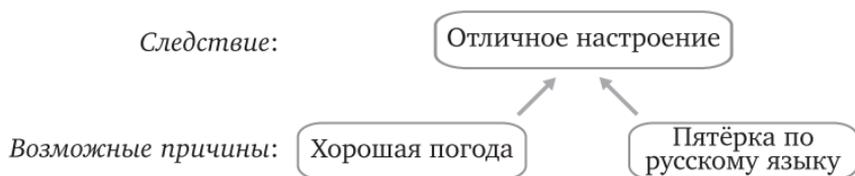
Значит, мальчик собрал 24 вишни, а девочка 48.

Пример 2. Когда Женя получает пятёрку по русскому языку, она всегда приходит домой в отличном настроении. Сегодня Женя пришла домой в отличном настроении. Значит ли это, что она получила пятёрку по русскому языку?

РАЗБОР ПРИМЕРА 2. Это тоже сравнительно простая задача. Обсуждая её, мы вводим понятия причины и следствия. Эти понятия получают дальнейшее развитие при разборе следующей задачи и на следующем занятии.

Решение. В условии не сказано, что пятёрка по русскому — *единственная* возможная причина отличного настроения Жени. Могут быть и другие причины: хорошая погода, пятёрка по математике или что-нибудь ещё. Поэтому Женя могла получить отличную оценку по русскому, а могла и не получить.

Можно нарисовать схему причин и следствий:



На первый взгляд, для объяснения такой простой задачи можно обойтись без схемы. Однако эта схема послужит удобной отправной точкой при разборе следующей задачи.

Пример 3. У капитана Кука есть попугай Полли, который накануне бури всегда чихает. Полли только что чихнул. Капитан Кук говорит: «Мой попугай чихнул, значит, завтра будет буря». Верно ли умозаключение капитана? Обязательно ли завтра будет буря?

РАЗБОР ПРИМЕРА 3. Эта задача кажется труднее предыдущей, хотя основная идея та же самая. Трудность вызвана тем, что на этот раз причина (буря) наступает позже следствия (чихание).

Сначала участники заявляют, что капитан Кук прав: завтра точно будет буря.

Поэтому мы переходим к обсуждению возможных причин чихания попугаев. То, что Полли сегодня чихает, может быть объяснено разными причинами. Надвигающаяся буря — только одна из них; попугай может также чихнуть, например, из-за простуды или аллергии на пыль.

Для наглядности мы рисуем схему причин и следствий и вместе заполняем её.



Я подчёркиваю, что эта задача похожа на задачу про Женю и пятёрку по русскому языку. В обеих задачах есть следствие, которое может быть вызвано разными причинами. Если мы наблюдаем следствие, мы не можем сделать вывод, что оно вызвано какой-то конкретной причиной.

Итак: завтра может быть буря, но её может и не быть. Поэтому умозаключение капитана неверно.

Пример 4. В абсолютно тёмной комнате стоит стеклянная ваза, в которой 10 чёрных и 12 белых шаров. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из сосуда, чтобы можно было с уверенностью сказать следующее:

- среди вынутых шаров есть пара шаров одного цвета;
- среди вынутых шаров есть пара чёрных шаров?

РАЗБОР ПРИМЕРА 4. Это отличный пример задачи, в которой нетрудно догадаться до правильного ответа, а вот строго обосновать его значительно сложнее.

а) Участники сразу выдают ответ: 3. Я отвечаю, что меня надо убедить в его правильности.

Как доказать, что 3 шара — действительно «наименьшее возможное число»?

Сначала надо показать, что если взять меньше трёх шаров, то среди них *может* не оказаться пары одного цвета. Другими словами, число, меньшее чем 3, не может быть правильным ответом. Затем нужно объяснить, что если взять 3 шара, то среди них *обязательно* найдётся пара одинаковых шаров.

Как доказать, что если взять меньше трёх шаров, то среди них может не оказаться пары одного цвета? Достаточно привести пример. Если мы вынули 2 шара, то, возможно, один из них чёрный, а другой белый. В таком наборе нет пары шаров одного цвета. Следовательно, меньше чем тремя шарами нам не обойтись.

Как объяснить, что среди трёх шаров обязательно найдётся пара одинаковых? Это чуть-чуть сложнее. Предположим, что среди вынутых шаров не оказалось ни одной одноцветной пары. Значит, среди них самое большее 1 чёрный шар и самое большее 1 белый, т. е. всего самое большее 2 шара. Но этого не может быть: ведь мы вынули 3 шара.

Можно объяснить эту часть решения по-другому, просто перечислив все возможные сочетания трёх шаров: 3 чёрных; 2 чёрных и 1 белый; 1 чёрный и 2 белых; 3 белых. В каждом из этих сочетаний есть пара шаров одного цвета.

б) Несколько человек дают правильный ответ: 14. Однако я напоминаю: надо убедительно объяснить, что 14 — действительно наименьшее возможное число.

Сначала докажем, что если взять меньше чем 14 шаров, то среди них может не оказаться чёрной пары. Действительно, возьмём 13 шаров. Может случиться так, что из них 12 белых и 1 чёрный. В таком наборе нет чёрной пары. Поэтому для полной уверенности в том, что у нас есть пара чёрных шаров, меньше чем четырнадцать шарами не обойтись.

Теперь докажем, что если взять 14 шаров, то среди них обязательно найдётся чёрная пара. В сосуде только 12 белых шаров. Следовательно, в любом наборе из 14 шаров *самое большее* 12 белых. Значит, в любом наборе из 14 шаров *самое меньшее* 2 чёрных шара (пара).

Для преподавателей. Обратите внимание участников на то, что рассуждения типа «из 14 шаров 12 будут белыми и 2 чёрными» неверны. На самом деле среди 14 шаров не обязательно *ровно* 12 белых и *ровно* 2 чёрных: возможны другие сочетания.

Верными будут доказательства, в которых употребляются выражения «самое большее 12» и «самое меньшее 2» (или «не больше 12» и «не меньше 2»).

Для преподавателей. В этой задаче, как и во многих других, требуется найти наименьшее (или наибольшее) число, при котором точно произойдёт некоторое событие. Чтобы решить задачу такого типа, нужно обосновать две вещи: *необходимость* и *достаточность*. Доказать «необходимость» — значит показать, что правильный ответ не может быть меньше (или больше) предложенного участником. Доказать «достаточность» — значит объяснить, что предложенный ответ в любом случае гарантирует требуемый результат.

Идея «необходимости и достаточности» закрепляется в следующей задаче и в подборке задач к этому занятию.

Пример 5. В абсолютно тёмной комнате стоит сундук с сокровищами, в котором 25 рубинов, 15 алмазов и 4 сапфира. Какое наименьшее число драгоценных камней надо вынуть из сундука, чтобы можно было с уверенностью сказать следующее:

- а) среди вынутых камней есть пара камней одного вида;
- б) среди вынутых камней есть пара алмазов?

РАЗБОР ПРИМЕРА 5. а) Ответ: 4.

Сначала докажем, что если взять меньше четырёх камней, то среди них может не оказаться пары. Пример: среди трёх камней может быть один рубин, один сапфир и один алмаз. В таком наборе нет ни одной пары. Поэтому надо взять хотя бы 4 камня.

Теперь надо доказать, что если взять 4 камня, то пара обязательно найдётся. Если среди взятых камней нет ни одной пары, значит, мы взяли самое большее 1 рубин, самое большее 1 сапфир и самое большее 1 алмаз. Поэтому всего мы взяли самое большее 3 камня. Это противоречит предположению, что мы взяли 4 камня.

б) Ответ: 31.

Сначала докажем, что если взять меньше 31 камня, то пары алмазов среди них может не найтись. Пример. Возьмём 30 камней. Возможно, среди них 25 рубинов, 4 сапфира и 1 алмаз. В таком наборе нет пары алмазов.

Теперь объясним, что если взять 31 камень, то пара алмазов обязательно найдётся. Среди 31 камня самое большее 25 рубинов и самое большее 4 сапфира. Значит, всего рубинов и сапфиров самое большее 29. Следовательно, среди 31 камня самое меньшее 2 алмаза.

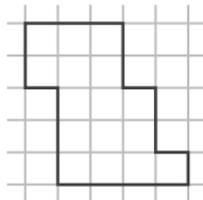
Для преподавателей. Когда дети объясняют достаточность ответа в таких задачах, им часто кажется удобным рассмотреть «худший случай». Например, «в худшем случае мы достанем один рубин, один сапфир и один

алмаз» или «в худшем случае у нас 12 чёрных шаров и 2 белых». Это не вполне удовлетворительное рассуждение, поскольку «худший случай» — довольно расплывчатое понятие. Наша цель — научить детей более строгим объяснениям: «если нет пары, значит, у нас самое большое по одному камню каждого вида» или «у нас самое большое 12 чёрных шаров, значит, самое меньшее 2 чёрных».

Однако нужно учитывать возраст детей и то, что они пришли на математический кружок в первый раз. К тому же им одновременно предлагаются две новые идеи: доказательство из двух частей (необходимость и достаточность) и обоснование достаточности. Для некоторых это слишком много.

Поэтому можно порекомендовать временный компромисс: преподаватель подчёркнуто придерживается строгих рассуждений, когда объясняет решение сам, и требует того же от самых способных участников. А остальным детям на этом этапе вполне позволительно рассматривать «худший случай».

Пример 6. Покажите, как разрезать показанную на рисунке фигуру на две части, а затем, не накладывая эти части друг на друга, составить из них квадрат. Разрез должен проходить по линиям сетки, но не обязательно должен быть прямой линией.



Разбор примера 6. Эту задачу можно решать по-разному, в том числе *методом проб и ошибок*, пробуя все возможные разрезы, до тех пор пока не наткнёмся на решение. Рано или поздно решение найдётся, но этот способ может оказаться долгим.

Попробуем применить метод проб и ошибок «с умом». Вычислим размеры квадрата. Поскольку фигура на рисунке имеет площадь 16, площадь квадрата тоже должна быть равна 16. Поэтому квадрат должен иметь сторону 4. Теперь, зная длину стороны квадрата, попробуем мысленно наложить его на исходную фигуру. Первая идея, которая приходит в голову: возможно, нижний край фигуры (длина которого тоже равна 4) совпадает с нижней стороной квадрата. Эта догадка приводит к верному решению. Правильный разрез приведён в разделе «Решения» (с. 265).

Пример 7*. На дне рождения Робина Гуда его подруга Мэриан решила узнать, сколько ему лет. Малютка Джон сказал ей, что Робину не меньше 25 лет. Брат Тук заявил, что Робину не меньше чем 24. Сколько лет Робину Гуду, если известно, что ровно один из двух друзей солгал?

РАЗБОР ПРИМЕРА 7. На занятии с новичками приходится подсказывать все основные этапы решения. Зато к концу года, набравшись опыта в рассуждениях про рыцарей и лжецов, дети решают такие задачи без труда.

Решение. Мы знаем, что ровно один из друзей солгал. Значит, либо Малютка Джон солгал, а Брат Тук сказал правду, либо Малютка Джон сказал правду, а Брат Тук солгал.

Предположим, что Брат Тук солгал, а Малютка Джон сказал правду. Это значит, что утверждение «Робину не меньше 24 лет» ложно. Другими словами, Робину меньше 24 лет (23 года или меньше). Однако по словам Малютки Джона, который сказал правду, Робину не меньше 25. Но Робин не может быть одновременно моложе 24 и не моложе 25. Следовательно, наше предположение, что Брат Тук солгал, неверно.

Значит, Брат Тук сказал правду, а Малютка Джон солгал. Малютка Джон утверждает, что Робину не меньше 25 лет (25 или больше). Поскольку это ложь, Робину на самом деле 24 года или меньше. По словам Брата Тука, сказавшего правду, Робину не меньше 24 лет. Из этих двух утверждений следует, что Робину ровно 24 года.

Наконец, наступает время решать задачи самостоятельно.

О подборках задач и домашнем задании

Я объясняю участникам, что на каждом занятии они будут получать подборку задач для самостоятельного решения. Вряд ли кто-то успеет решить все задачи до конца занятия. Нерешённые задачи — это домашнее задание к следующему разу.

Некоторые из этих задач довольно хитрые, и вполне возможно, что решить какие-то из них не получится. Но попробовать всегда стоит. Кому-то поможет обсуждение задач с другими участниками кружка. Это интересные задачи, и родители тоже могут увлечься их решением.

Полностью записывать текст решения не обязательно. Достаточно записать ровно столько, чтобы по этим записям можно было вспомнить решение и рассказать его на занятии.

После этого вступления я раздаю задачи, при этом придерживаясь рекомендаций из раздела «Как организовать решение задач» (с. 259).

Весь остаток занятия участники работают над задачами. Я периодически напоминаю им, что охотно отвечу на любые вопросы,

и предлагаю рассказывать решения (подними руку; Расскажи мне, как ты решил задачу).

Подборка задач

Предварительные замечания. Головоломка с рыбкай (задача 2). Получив в руки спички, дети сразу начнут решать головоломку и перестанут слушать преподавателя. Поэтому спички раздаются в последнюю очередь — после листков с задачами.

Задачи 7 и 8. Это «дополнительные» задачи. Они включаются в подборку, если для некоторых участников остальные задачи слишком простые.

Задача 1*. а) Бобёр распилил электропилой бревно на поленья. Он сделал 25 распилов. Сколько получилось поленьев?

б) Бобёр распилил два бревна на поленья. Всего он сделал 40 распилов. Сколько получилось поленьев? (*Примечание.* Бобёр никогда не пилит два бревна одновременно. Он не обязательно распиливает бревна на одинаковое количество поленьев. Поленья могут быть разной длины.)

в) Тот же вопрос, если брёвен было три, а распилов 50.

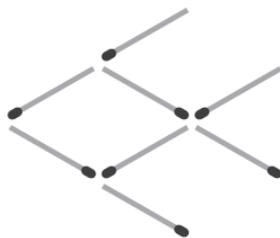
Задача 2. Переместив только три спички, сделайте так, чтобы рыбка плыла вправо.

Задача 3. В ящике лежат 14 красных и 10 синих шаров. Ящик находится в абсолютной тёмной комнате. Какое наименьшее число шаров надо вынуть из ящика, чтобы можно было с уверенностью сказать следующее:

- среди вынутых шаров есть три шара одного цвета;
- среди вынутых шаров есть три синих шара?

(Обосновывая оба ответа, помните, что рассуждение должно состоять из двух частей. Сначала докажите, что если взять меньшее число шаров, то нужного сочетания шаров **может** не получиться. Затем докажите, что ваш ответ **в любом случае** гарантирует нужное сочетание.)

Задача 4. В коробке лежат 39 носков. Среди любых двух из этих носков есть хотя бы один синий. Хотя бы один носок в коробке красный. Сколько красных носков в коробке?



Задача 5. Четыре участницы математических кружков из разных городов — Москвы, Санкт-Петербурга, Самары и Челябинска — провели вместе две недели в летнем математическом лагере. Их имена: Маша, Даша, Ксюша и Наташа. Вот что про них удалось узнать.

1. Маша и девочка из Челябинска жили в одной комнате.

2. Маша никогда не была ни в Москве, ни в Самаре.

3. Однажды в лагере провели футбольный матч. Ксюша играла в одной команде с девочкой из Москвы. Девочка из Челябинска была в другой команде.

4. Наташа часто играла в шахматы с девочкой из Москвы.

Определите, в каком городе живёт каждая девочка.



Задача 6. Самолёт вылетает из Мурманска и летит точно на север. Пролетев 300 километров, он поворачивает и летит ещё 300 километров точно на запад. Затем снова поворачивает и летит 300 километров точно на юг и ещё 300 километров точно на восток. После этого самолёт приземляется. Окажется ли он в том же месте, из которого вылетел?

(Подсказка. Решить эту задачу поможет глобус.)

Задача 7. В ящике 30 пар оранжевых перчаток и 20 пар чёрных перчаток. Какое наименьшее число перчаток надо (не глядя) достать из ящика, чтобы можно было с уверенностью сказать следующее:

а) среди вынутых перчаток есть пара перчаток одного цвета;

б) среди вынутых перчаток есть пара чёрных перчаток?

(Учтите, что в каждой паре перчатки разные: одна для левой и одна для правой руки.)

Задача 8. Сколько слонов и верблюдов в зоопарке города Урюпинска, если известно, что всего у этих животных 22 уха, а горбов в 9 раз больше, чем хоботов? (Все верблюды в этом зоопарке двугорбые.)

Осталось неизвестным число, стоящее на пересечении четвёртой строки и четвёртого столбца. Но мы знаем, что произведение этого числа и первых трёх чисел в четвёртой строке равно 1. Вспомнив, как мы восстанавливали эти три числа, определим их произведение: оно равно произведению всех девяти чисел в таблице 3×3 . Поэтому по числам в таблице 3×3 можно определить число на пересечении четвёртой строки и четвёртого столбца: это 1, если произведение чисел в таблице 3×3 равно 1, и -1 , если это произведение равно -1 .

Сделаем вывод: как бы ни была заполнена таблица 3×3 , остальные клетки таблицы 4×4 можно заполнить с соблюдением нашего условия, причём единственным способом. Если таблицы 3×3 заполнены по-разному, то и соответствующие таблицы 4×4 будут заполнены по-разному. Значит, если подсчитать все способы заполнения таблицы 3×3 числами $+1$ и -1 , то получится ответ к задаче. Это 2^9 .

Библиография

1. Генкин С. А., Итенберг И. В., Фомин Д. В. Ленинградские математические кружки. Киров: АСА, 1994.
2. Спивак А. В. Математический кружок. 6—7 классы. М.: МЦНМО, 2010.
3. Спивак А. В. Тысяча и одна задача по математике. М.: Просвещение, 2010.
4. Спивак А. В. Математический праздник. М.: Бюро Квантум, 2004.
5. Шарыгин И. Ф., Ерганжиева Л. Н. Наглядная геометрия, 5—6 классы. М.: Дрофа, 2009.
6. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки. М.: МЦНМО, 2006.
7. Яценко И. В. Приглашение на математический праздник. М.: МЦНМО, 2009.
8. Шарыгин И. Ф. Уроки дедушки Гаврилы, или Развивающие каникулы. М.: Дрофа, 2003.
9. Шарыгин И. Ф. Задачи на смекалку, 5—6 классы. М.: Просвещение, 2010.
10. Медников Л. Э. Чётность. М.: МЦНМО, 2009.
11. Чулков П. В. Арифметические задачи. М.: МЦНМО, 2009.
12. Кноп К. А. Взвешивания и алгоритмы. М.: МЦНМО, 2010.
13. Сбигнев К. А. Делимость и простые числа. М.: МЦНМО, 2012.
14. Раскина И. В., Шноль Д. Э. Логические задачи. М.: МЦНМО, 2014.
15. Савин А. П. Занимательные математические задачи. М.: АСТ, 1995.
16. Бугаенко В. О. Турниры им. Ломоносова. М.: МЦНМО, 1998.
17. Смаллиан Р. Принцесса или тигр. М.: Мир, 1985.
18. Смаллиан Р. Загадка Шахразады и другие удивительные древние и современные головоломки. М.: ЛОРИ, 2014.
19. Dorichenko S. A Moscow Math Circle: Week-by-Week Problem Sets (MSRI Mathematical Circles Library) American Mathematical Society, 2012.
20. Gardner M. Mental Magic. Dover Publications, 1986.
21. Gardner M. Entertaining Mathematical Puzzles.
22. Patrick D. Introduction to Counting & Probability. The Art of Problem Solving 2007.
23. Vandervelde S. Circle in a Box. American Mathematical Society, 2012.
24. Dudeney H. E. The Strand Magazine. 1924. Vol. 68.

25. Московский центр непрерывного математического образования. Интернет-проект «Задачи». <http://problems.ru/>.
26. Математический Гуру. Материалы кружка А. Н. Савина. <http://www.mathguru.ru/circle/>.
27. Центр дополнительного образования одаренных школьников. Киров. <http://www.cdoosh.ru>. Математическое домино.
28. *Davis T.* Mathematical Circles Topics. <http://www.geometer.org/mathcircles/>.
29. *Garlikov R.* The Socratic Method: Teaching by Asking. www.garlikov.com/Soc/Meth.html.

Магазин «Математическая книга»

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга» в Москве по адресу: Б. Власьевский пер., д. 11; тел. (499) 241-72-85; biblio.mccme.ru

Книга — почтой: <http://biblio.mccme.ru/shop/order>

Книги в электронном виде: <http://www.litres.ru/mcnmo/>

Мы сотрудничаем с интернет-магазинами

- Книготорговая компания «Абрис»; тел. (495) 229-67-59, (812) 327-04-50; www.umlit.ru, www.textbook.ru, абрис.рф
- Интернет-магазин «Книга.ру»; тел. (495) 744-09-09; www.kniga.ru

Наши партнеры в Москве и Подмоскowie

- Московский Дом Книги и его филиалы (работает интернет-магазин); тел. (495) 789-35-91; www.mdk-arbat.ru
- Магазин «Молодая Гвардия» (работает интернет-магазин): ул. Б. Полянка, д. 28; тел. (499) 238-50-01, (495) 780-33-70; www.bookmg.ru
- Магазин «Библио-Глобус» (работает интернет-магазин): ул. Мясницкая, д. 6/3, стр. 1; тел. (495) 781-19-00; www.biblio-globus.ru
- Спорткомплекс «Олимпийский», 5-й этаж, точка 62; тел. (903) 970-34-46
- Сеть киосков «Аргумент» в МГУ; тел. (495) 939-21-76, (495) 939-22-06; www.arg.ru
- Сеть магазинов «Мир школьника» (работает интернет-магазин); тел. (495) 715-31-36, (495) 715-59-63, (499) 182-67-07, (499) 179-57-17; www.uchebnik.com
- Сеть магазинов «Шаг к пятерке»; тел. (495) 728-33-09, (495) 346-00-10; www.shkolkniga.ru
- Издательская группа URSS, Нахимовский проспект, д. 56, Выставочный зал «Наука — Всем»; тел. (499) 724-25-45, www.urss.ru
- Книжный магазин издательского дома «Интеллект» в г. Долгопрудный: МФТИ (новый корпус); тел. (495) 408-73-55

Наши партнеры в Санкт-Петербурге

- Санкт-Петербургский Дом книги: Невский пр-т, д. 62; тел. (812) 314-58-88
- Магазин «Мир науки и медицины»: Литейный пр-т, д. 64; тел. (812) 273-50-12
- Магазин «Новая техническая книга»: Измайловский пр-т, д. 29; тел. (812) 251-41-10
- Информационно-книготорговый центр «Академическая литература»: Васильевский остров, Менделеевская линия, д. 5
- Киоск в здании физического факультета СПбГУ в Петергофе; тел. (812) 328-96-91, (812) 329-24-70, (812) 329-24-71
- Издательство «Петроглиф»: Фарфоровская, 18, к. 1; тел. (812) 560-05-98, (812) 943-80-76; k_i_@bk.ru, k_i_@petroglyph.ru
- Сеть магазинов «Учебная литература»; тел. (812) 746-82-42, тел. (812) 764-94-88, тел. (812) 235-73-88 (доб. 223)

Наши партнеры в Челябинске

- Магазин «Библио-Глобус», ул. Молдавская, д. 16, www.biblio-globus.ru

Наши партнеры в Украине

- Александр Елисаветский. Рассылка книг наложенным платежом по Украине: тел. 067-136-37-35; df-al-el@bk.ru